

MASARYKOVA UNIVERZITA V BRNĚ
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV TEORETICKÉ FYZIKY A ASTROFYZIKY

KVANTOVÉ KOSMOLOGICKÉ
MODELY SE SKALÁRNÍM POLEM A
KONSTANTNÍ PROSTOROVOU
KŘIVOSTÍ

ROMAN ŠTEIGL

BRNO 2004

Děkuji vedoucímu diplomové práce doc.
F. Hinterleitnerovi za trpělivost, podporu
a cenné rady při vedení diplomové práce.

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně a že jsem použil jen citované literatury.

V Brně 11. května 2004

Obsah

1	Úvod	5
2	Klasická hamiltonovská formulace obecné teorie relativity	6
2.1	ADM akce	6
2.2	Vazby	8
2.3	Jiné formulace kanonické OTR	10
3	Kanonická kvantová teorie gravitace	13
3.1	Program kvantování, funkcionální reprezentace	13
3.2	Wheelerova - DeWittova rovnice	14
3.3	Časový vývoj	15
4	Poznámky ke kosmologii	17
4.1	RW řešení	17
4.2	Skalární pole jako gravitační zdroj, inflace	18
5	Homogenní a izotropní kosmologický model se skalárním polem	21
5.1	Klasický model	21
5.2	Kvantový model	27
5.2.1	Wheelerova-DeWittova rovnice	29
5.2.2	Řešení pro uzavřený model	32
5.2.3	Řešení pro otevřený model	38
5.2.4	Řešení pro rovný model	40
5.2.5	Časový vývoj	41
6	Závěr	43

Kapitola 1

Úvod

Motivací pro řešení kosmologických modelů se skalárním polem jsou problematické výsledky a očekávání klasické kosmologické teorie platné v raných obdobích vývoje vesmíru. Jde zvláště o teorii inflace, která vysvětluje některé rozpory mezi nejjednoduššími kosmologickými modely a skutečným pozorováním. Kvantové modely jsou pak řešeny s očekáváním, že takovou fázi budou zahrnovat. Na klasické úrovni je způsobena inflační fáze dominancí potenciálového členu v tenzoru energie impulzu skalárního pole. Tato práce nezahrnuje odpovídající kvantová řešení.

Zadáním diplomové práce bylo vyšetřit homogenní a izotropní kvantový kosmologický model s hmotným nebo nehmotným skalárním polem a konstantní prostorovou křivostí. Prostory s konstantní křivostí (někdy se hovoří o prostorech sféricky symetrických v každém bodě) mohou být s kladnou nebo zápornou, případně nulovou křivostí. V této práci jsou příslušná řešení hledána jako funkce splňující Wheelerovu - DeWittovu rovnici, která je jednoduše řešitelná v případě nehmotného pole. Řešení pro prostory s různou křivostí jsou řešením stejné WD rovnice lišící se pouze členem s informací o křivosti prostoru.

Uvedená řešení jsou typickým testem teorie na jednoduchých příkladech, ale v případě kanonické kvantové teorie gravitace není konečná teorie vytvořena. Týká se to zejména problému uspořádání operátorů. Pro různá uspořádání tak dostáváme různé teorie. V páté kapitole jsou nalezena řešení pro všechna uspořádání operátorů v případě nehmotného skalárního pole. Potom lze snadno vidět vliv uspořádání operátorů na výsledné řešení.

Kapitola 2

Klasická hamiltonovská formulace obecné teorie relativity

2.1 ADM akce

Všechny výsledky uvedené v druhé kapitole lze najít v [6], [13], [17], [18], [19], [24]. Nebude-li uvedeno jinak, pracujeme v absolutních jednotkách, tj. $\hbar = c = \kappa = 1$. V této kapitole nabývají řecké indexy hodnot 0, 1, 2, 3, a latinské indexy 1, 2, 3. Používáme signaturu $(-+++)$.

V rámci kanonické teorie gravitace předpokládáme, že časoprostorová varieta \mathcal{M} má topologickou strukturu typu $\mathbb{R} \times \Sigma = \mathcal{M}$, kde Σ je třírozměrná prostorová varieta. Dá se dokázat, že taková struktura je nutná, má-li být úplně řešitelná Cauchyova úloha [6], [24]. V původní souřadnicové ADM (Arnold - Deser - Misner) formulaci je tento předpoklad vyjádřen jistým rozkladem metrického tenzoru. Tento předpoklad o speciální struktuře časoprostoru, který slouží k formulaci OTR (Obecná Teorie Relativity) v rámci hamiltonovského formalismu, bude posléze přenesen do kvantové teorie.

Pro $t \in \mathbb{R}$ máme jednoparametrickou množinu vložení $\Sigma \rightarrow \mathcal{M}$ definovaných jako $x_t(x^a) := x(t, x^a)$, kde x^a jsou souřadnice na Σ . Parametrizace vložení je dána deformačním vektorovým polem T^μ

$$T^\mu = Nn^\mu + N^\mu := \frac{\partial x^\mu}{\partial t}. \quad (2.1)$$

Přitom ve výše uvedeném vztahu je n^μ normála k prostorové nadploše, takže je $n_\mu n^\mu = -1$ a $N^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^a} N^a$ je vektor tečný k Σ , tj. $n_\mu N^\mu = 0$. Tak

dostaneme pro elementární interval

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.2)$$

$$= g_{\mu\nu} \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial t} dt + \frac{\partial x^\mu}{\partial x^a} dx^a \right) \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial t} dt + \frac{\partial x^\nu}{\partial x^b} dx^b \right) \quad (2.3)$$

$$ds^2 = (N_a N^a - N^2) dt dt + q_{ab} dx^a dx^b + N_a (dt dx^a + dx^a dt). \quad (2.4)$$

Využili jsme přitom definici 2.1 pro deformační vektorové pole. Jestliže máme v nějakém čase daný bod na prostorové nadploše, tak potom sledujeme-li pohyb tohoto bodu z časoprostoru, udává deformační vektorové pole míru a směr změny polohy sledovaného bodu v časoprostoru.

Tak máme konečně pro metrický tenzor

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} N_a N^a - N^2 & N_a \\ N_a & q_{ab} \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

S pomocí 2.5 můžeme po řadě přímých výpočtů najít

$$\begin{aligned} \mathcal{L} := \sqrt{-g} R^{(4)} &= N \sqrt{q} (K_{ab} K^{ab} - (K_a^a)^2 + R^{(3)}) \\ &\quad - 2(\sqrt{q} K_a^a)_{,0} + 2(\sqrt{q} K_b^b N^a - \sqrt{q} q^{ab} N_{,b})_{,a}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

kde $g = -\det(g_{\mu\nu}) = N^2 q = N^2 \det(q_{ab})$, čárky značí parciální derivaci a středníky derivaci kovariantní a

$$K_{ab} = \frac{1}{2N} (N_{a;b} + N_{b;a} - q_{ab,0}), \quad (2.7)$$

je druhá základní forma plochy, někdy nazývaná tenzor vnější křivosti, protože popisuje křivost prostorové nadplochy $x^0 = konst.$ jakoby nahlížené z časoprostoru do kterého je vložena. Později se z více geometrického pohledu podíváme na souvislost vnějšího tenzoru křivosti s Riemannovým tenzorem prostoru, do něhož je prostorová nadplocha $x^0 = konst.$ vložena, a s Riemannovým tenzorem vložené prostorové nadplochy.

Z 2.6 můžeme vynechat člen, který je úplnou derivací podle času a člen, který je prostorovou divergencí. Takovýmto způsobem dostaneme ADM (Arnowitt-Deser-Misner) akci

$$S = \int dt \int d^3x N \sqrt{q} (K_{ab} K^{ab} - (K_a^a)^2 + R^{(3)}). \quad (2.8)$$

V analogii s klasickou mechanikou bývá vnější křivost $K_{ab} K^{ab} - (K_a^a)^2$ interpretována jako kinetická energie a $-R^{(3)}$ jako energie potenciální. Lagrangeova funkce v 2.8 je invariantní vzhledem k prostorovým souřadnicovým transformacím.

2.2 Vazby

K veličinám N , N_a , q_{ab} zavádíme kanonicky sdružené impulzy

$$p := \frac{\delta L}{\delta N_{,0}} = 0, \quad (2.9)$$

$$p^a := \frac{\delta L}{\delta N_{a,0}} = 0, \quad (2.10)$$

$$p^{ab} := \frac{\delta L}{\delta q_{ab,0}} = \sqrt{q}(q^{ab}K_c^c - K^{ab}), \quad (2.11)$$

přítom rovnosti 2.9 a 2.10 nazýváme primární vazby. Lagrangeova funkce v 2.8 není funkcí veličin $N_{,0}$, $N_{a,0}$, (zobecněné rychlosti) a rovnosti 2.9 a 2.10 jsou tedy jasné. Poissonovy závorky jsou (x je bod v prostoru)

$$\{q_{ab}(x), q_{cd}(x')\} = 0, \quad (2.12)$$

$$\{p^{ab}(x), p^{cd}(x')\} = 0, \quad (2.13)$$

$$\{q_{ab}(x), p^{cd}(x')\} = \delta_{(a}^c \delta_{b)}^d \delta(x - x'). \quad (2.14)$$

Z 2.11 vyjádříme K^{ab} a pro Hamiltonovu funkci získáme Legendrovou transformací

$$H = \int d^3x (pN_{,0} + p^a N_{a,0} + N\mathcal{H} + N_a \mathcal{H}^a), \quad (2.15)$$

kde

$$\mathcal{H} \equiv \mathcal{G}_{abcd} p^{ab} p^{cd} - \sqrt{q} R^{(3)} \quad (2.16)$$

$$\equiv \sqrt{q}(K_{ab}K^{ab} - (K_a^a)^2 - R^{(3)}), \quad (2.17)$$

$$\mathcal{H}^a \equiv -2p^{ab}{}_{;b}, \quad (2.18)$$

přítom $\mathcal{G}_{abcd} = \frac{1}{2\sqrt{q}}(q_{ac}q_{bd} + q_{bc}q_{ad} - q_{ab}q_{cd})$ je DeWittova (super)metrika na šestirozměrné nadploše prostorových metrik, definované v každém bodě prostoru. Na takové nadploše je bod dán složkami metrického tenzoru q_{ab} . Veličiny \mathcal{H} a \mathcal{H}_a se obvykle nazývají super-hamiltonián a super-impuls. Pověšme si například, že pro sféricky symetrické RW (Robertson - Walker) prostory, u kterých je $N = 1$, $N^a = 0$, je hamiltoniánem prostorový integrál z \mathcal{H} .

Variací akce

$$S = \int dt \left(\int d^3x (pN_{,0} + p^a N_{a,0} + p^{ab} q_{ab,0}) - H \right) \quad (2.19)$$

vzhledem k veličinám p^{ab} , q_{ab} , N^a a N získáme postupně rovnice představující hamiltonovskou množinu rovnic ekvivalentní s Einsteinovými vakuovými rovnicemi

$$q_{ab,0} = \frac{\delta H}{\delta p^{ab}}, \quad (2.20)$$

$$p^{ab},_0 = -\frac{\delta H}{\delta q_{ab}}, \quad (2.21)$$

$$\mathcal{H}_a = 0, \quad (2.22)$$

$$\mathcal{H} = 0. \quad (2.23)$$

Poslední dvě rovnice se nazývají difeomorfní a hamiltonovská vazba; jde o vazby na kanonické proměnné. Je patrné, že dynamické rovnice neurčují N a N^a a ty jsou tudíž libovolné.

Hamiltonovská vazba má v CQG (Canonical Quantum Gravity) zásadní význam, který můžeme dobře pochopit z jejího geometrického významu. Jestliže definujeme první základní formu plochy jako $q_{\mu\nu} := g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu$, kde n_μ je normála k prostorové nadploše a druhou základní formu plochy¹ jako $K_{\mu\nu} := q_\mu^\rho q_\nu^\sigma \nabla_\rho n_\sigma$, má Gaussova rovnice známá z diferenciální geometrie tvar [13]

$$R^{(3)\mu}_{\nu\rho\sigma} = R^{(4)\alpha}_{\beta\gamma\delta} q_\alpha^\mu q_\nu^\beta q_\rho^\gamma q_\sigma^\delta + K_\sigma^\mu K_{\nu\rho} - K_\rho^\mu K_{\nu\sigma}, \quad (2.24)$$

odkud pro skalární křivost indukované metriky vyjde

$$R^{(3)} = R^{(4)} + 2R_{\mu\nu} n^\mu n^\nu + (K_\mu^\mu)^2 - K^{\mu\nu} K_{\mu\nu} \quad (2.25)$$

neboli²

$$G_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = -\frac{\mathcal{H}}{2\sqrt{q}}, \quad (2.26)$$

kde $G_{\mu\nu}$ je Einsteinův tenzor. Je jasné, že pokud jsou splněny Einsteinovy vakuové rovnice $G_{\mu\nu} = 0$ je splněna i hamiltonovská vazba.³ Je důležité, že platí i opačné tvrzení (Wheeler [6]): jestliže je splněna hamiltonovská vazba jsou splněny vakuové Einsteinovy rovnice. Toto tvrzení je pravdivé pokud z

¹ $K_{\mu\nu}$ je symetrický tenzor a $q_\mu^\nu = g^{\nu\sigma} q_{\mu\sigma}$ je projekční operátor. První i druhá základní forma plochy jsou prostorové v tom smyslu, že platí $q_{\mu\nu} n^\nu = 0 = K_{\mu\nu} n^\nu$.

²Je jasné, že $q_{ab} = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^a} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^b} = (q_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu) \frac{\partial x^\mu}{\partial x^a} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^b} = q_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^a} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^b}$, protože n_μ je normála k prostorové nadploše a $\frac{\partial x^\mu}{\partial x^a}$ je prostorové pole. A proto např. $K_\mu^\mu = K_a^a$.

³Když platí Einsteinovy vakuové rovnice je prostor ricciovsky plochý, tj. platí $R_{\mu\nu} = 0$. A z rovnice 2.26 je vidět že platí: vnější křivost prostorové nadplochy vložené do ricciovsky plochého časoprostoru je rovna vnitřní (skalární) křivosti prostorové nadplochy. V ricciovsky plochých časoprostorech tedy platí Gaussova *theorem egregium*. Více k tomuto tématu např. [19].

rovnice $G_{\mu\nu}n^\mu n^\nu = 0$ vyplývá $G_{\mu\nu} = 0$. Že tomu tak skutečně je, je dokázáno např. v [17]. Tato vzájemná podmíněnost platnosti Einsteinových rovnic a hamiltonovské vazby je důvodem pro domněnku, že vlnový funkcional splňující kvantovou podobu hamiltonovské vazby obsahuje úplnou fyzikální informaci o gravitačním systému. To je důvod proč v CQG řešíme Wheelerovu-DeWittovu rovnici. V tomto smyslu je difeomorfní vazba vlastně nadbytečná.

2.3 Jiné formulace kanonické OTR

Hlavním zdrojem zde uvedených výsledků je [24] a [5]. Původní příčinou snahy formulovat kanonickou kvantovou teorii pomocí nových proměnných bylo zjednodušit podobu vazeb, ale později se ukázaly i jiné výhody takové formulace. Pouze zde shrneme základní definice a výsledky. Triáda je trojice ortonormálních vektorů tečných k prostorové nadploše. Prostorová metrika vyjádřená pomocí komponent triády je

$$q_{ab} := e_a^i e_b^j \delta_{ij}, \quad (2.27)$$

kde vnitřní indexy $i, j, k \dots$ nabývají hodnot 1, 2, 3. Libovolný vektor můžeme vyjádřit pomocí jeho komponent v ortonormální bázi tak, že $V^i = e_a^i V^a$ a $V_i = e_i^a V_a$. Zásadní věcí je zavedení spinové konexe $\omega_{a\ j}^i$ obvyklým způsobem

$$D_a T_i^j = \frac{\partial T_i^j}{\partial x^a} + \omega_{a\ k}^j T_i^k - \omega_{a\ i}^k T_k^j. \quad (2.28)$$

Spinová konexe umožňuje mimo jiné i kovariantně derivovat spinory a vnitřní indexy $i, j, k \dots$ se často nazývají spinorovými. Je třeba explicitně vyjádřit vztah mezi Christoffelovou a spinovou konexí

$$\omega_{a\ j}^i = e_b^i e_j^c \Gamma_{ac}^b - e_j^c \frac{\partial e_c^i}{\partial x^a}, \quad (2.29)$$

nebo ekvivalentně po nějakých úpravách

$$D_a e_b^i = 0. \quad (2.30)$$

Projekce vnější křivosti do triády je

$$K_a^i = K_{ab} e_j^b \delta^{ji}. \quad (2.31)$$

Na druhou stranu K_{ab} je symetrický tenzor a pokud píšeme $K_{ab} = K_a^i e_b^j \delta_{ij}$ stojí na pravé straně součin matic, který obecně není symetrickou maticí.

Obecně tedy můžeme pravou stranu rozložit na součet symetrické a antisymetrické matice

$$K_{ab} = \frac{1}{2} K_{(a}^i e_{b)}^j \delta_{ij} + \frac{1}{2} K_{[a}^i e_{b]}^j \delta_{ij} \quad (2.32)$$

a musíme požadovat aby platilo

$$G_{ab} := K_{[a}^i e_{b]}^j \delta_{ij} = 0. \quad (2.33)$$

Výše uvedený vztah je nová vazba platná ve formalismu triád. Místo veličiny e_a^i se zavádí E_a^i tak, že je $q_{ab} = |\det(E_a^i)| E_a^i E_b^j \delta_{ji}$. S použitím těchto veličin můžeme zapsat následující vztahy, jejichž platnost je podmíněna vazbou 2.33

$$q_{ab} = |\det(E_k^c)| E_a^j E_b^j \quad (2.34)$$

$$p^{ab} = \frac{1}{|\det(E_k^c)|} E_k^a E_k^d K_{[d}^j \delta_{c]}^b E_j^c \quad (2.35)$$

kde q_{ab} a p^{ab} jsou veličiny definované v rámci ADM formalismu jako 2.5 a 2.11. Tak máme pro sekundární vazby 2.22 a 2.23

$$\mathcal{H}_a = -D_b(K_a^j E_j^b - \delta_a^b K_c^j E_j^c) \quad (2.36)$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{4\sqrt{q}}(K_a^l K_b^j - K_a^j K_b^l) E_j^a E_l^b - \sqrt{q} R \quad (2.37)$$

a pro vazbu 2.33 je

$$G_{ij} := K_{a[i} E_{j]}^a = 0. \quad (2.38)$$

Poissonovy závorky pro nové proměnné jsou

$$\{E_i^a(x), E_j^b(x')\} = 0 \quad (2.39)$$

$$\{K_a^i(x), K_b^j(x')\} = 0 \quad (2.40)$$

$$\{E_i^a(x), K_b^j(x')\} = \delta_b^a \delta_i^j \delta(x - x'). \quad (2.41)$$

Dalším krokem bývá zavedení nové konexe (Sen-Ashtekar-Immirzi-Barbero) rozšířením spinové konexe

$$A_a^i := \Gamma_a^i + \beta K_a^i, \quad (2.42)$$

přitom Γ_a^i je ve vztahu s původní spinovou konexí jako

$$D_a E_i^a = \partial_a E_i^a + \epsilon_{ij}^k \Gamma_a^j E_k^a. \quad (2.43)$$

V tomto novém formalismu je opět možné formulovat vazby, ale tyto výsledky zde uvádět nebudeme. Důvodem k tomu je, že na úrovni této práce nemá

takovýto formalismus hlubší smysl používat. Případná reformulace všech výpočtů v rámci nového formalismu uvedených v páté kapitole je v podstatě jednoduchou transformací a takovýto postup nepřináší žádné podstatné výhody. Právý potenciál této formulace se ukázal až poté co T. Jacobson a L. Smolin ukázali, že řešením WD rovnice jsou Wilsonovy smyčky⁴, které lze použít jako bázi stavů [23].

⁴Smyčky musí být hladké a nesmí se sami protínat.

Kapitola 3

Kanonická kvantová teorie gravitace

3.1 Program kvantování, funkcionální reprezentace

Výsledky uvedené v této kapitole lze nalézt např. v [6], [17], [19], [24]. Základním krokem je přechod od klasické algebry Poissonových závorek 2.12, 2.13 a 2.14 k jejich kvantové analogii představované komutačními relacemi

$$[\hat{q}_{ab}(x), \hat{q}_{cd}(x')] = 0, \quad (3.1)$$

$$[\hat{p}^{ab}(x), \hat{p}^{cd}(x')] = 0, \quad (3.2)$$

$$[\hat{q}_{ab}(x), \hat{p}^{cd}(x')] = i\delta_{(a}^c\delta_{b)}^d\delta(x - x'). \quad (3.3)$$

Dirac zavedl vazby 2.22, 2.23 do kvantové teorie jako vazby na stavový vektor

$$\hat{\mathcal{H}}_a(\hat{q}, \hat{p})\psi = 0, \quad (3.4)$$

$$\hat{\mathcal{H}}(\hat{q}, \hat{p})\psi = 0. \quad (3.5)$$

Ve výše uvedených vztazích budeme na ψ pohlížet jako na funkcionál metriky q_{ab} . (Je ovšem možné zvolit i jiné reprezentace. Metrickou reprezentaci zavedl Wheeler[6].) Potom definujeme

$$\hat{q}_{ab}\psi[q] := q_{ab}\psi[q], \quad (3.6)$$

$$\hat{p}^{ab}\psi[q] := -i\frac{\delta\psi[q]}{\delta q_{ab}}. \quad (3.7)$$

To je standardní volba, která ale nezřídka nevede ke smysluplným výsledkům, jak lze ukázat na jednoduchých příkladech. Např. v případě sféricky symetrického modelu s RW metrikou volba 3.6, 3.7 dává $\hat{a}\psi = a\psi$, $\hat{p}\psi = -i\frac{\partial\psi}{\partial a}$,

přítom a je v případě kladné křivosti tzv. poloměr vesmíru a je proto na místě požadovat aby platilo $a \geq 0$. Ale s takovýmto omezením není operátor \hat{p} samosdružený, i když je symetrický [1]. Samozřejmě formálně můžeme používat operátor \hat{a} bez omezení vlastních hodnot na \mathbb{R}^+ , potom ale nejenže chybí fyzikální interpretace záporných hodnot operátoru \hat{a} , ale dochází i ke sporu se skutečností, že q_{ab} je tenzor metrický; tak např. objem uzavřeného vesmíru počítaný z RW metriky je $V = 2\pi^2 a^3$ a když je $a < 0$ nabývá tento objem záporných hodnot. To je jednoduchý příklad širšího problému v CQG, který bývá nazýván problém zpětné rekonstrukce metrického tenzoru. Bylo dokázáno [17], že požadavek ponechávající kvantové období metrického tenzoru q_{ab} jeho klasické matematické vlastnosti je ve sporu s komutačními vztahy 2.12, 2.13, 2.14. Formálním řešením je zavést místo těchto komutačních vztahů nové (Klauder, Pilati, Isham, Kakas) tak, že

$$[\hat{q}_{ab}(x), \hat{q}_{cd}(x')] = 0, \quad (3.8)$$

$$[\hat{p}_a^b(x), \hat{p}_c^d(x')] = i(\delta_a^d \hat{p}_c^b(x) - \delta_c^b \hat{p}_a^d(x)) \delta(x - x'), \quad (3.9)$$

$$[\hat{q}_{ab}(x), \hat{p}_c^d(x')] = i\delta_{(a}^d \hat{q}_{b)c}(x) \delta(x - x'), \quad (3.10)$$

kde $p_a^b = q_{ac}p^{cb}$. V našem jednoduchém případě vesmíru s RW metrikou mají příslušné operátory jednoduchý tvar $\hat{a}\psi = a\psi$, $\hat{\pi}\psi = -ia\frac{\partial\psi}{\partial a}$. Tyto operátory již jsou samosdružené na $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^+, \frac{da}{a})$ [17].

3.2 Wheelerova - DeWittova rovnice

Kvantová obdoba hamiltonovské vazby vyjádřená v metrické reprezentaci je

$$\left(\frac{\delta}{\delta q_{ab}} \mathcal{G}_{abcd} \frac{\delta}{\delta q_{cd}} + \sqrt{q} R^{(3)} \right) \psi[q] = 0. \quad (3.11)$$

Toto je Wheelerova-DeWittova rovnice, která je základem zde uvedeného přístupu ke kanonické kvantové teorii gravitace. Jak již bylo uvedeno v části 2.2 máme důvody se domnívat, že všechny informace o gravitačním kvantovém systému získáme z jejího řešení.

Jedním ze základních problémů při řešení WD rovnice je, jakým způsobem uspořádat operátory v jejím prvním členu. To jistě souvisí s otázkou, má-li být operátor $\hat{\mathcal{H}}$ symetrický (hermiteovský), případně samosdružený, protože takové požadavky mají vliv na uspořádání operátorů. Existují argumenty pro i proti požadavku samosdruženosti operátoru $\hat{\mathcal{H}}$, [6], [17], [19]. Např. DeWitt požaduje, aby byly libovolné komutátory vazeb rovny nule ve stejném místě prostoru [6]. V této souvislosti se hovoří o konzistentnosti vazeb. Tím se má

na mysl, že kvantové komutační relace nevedou na nové vazby, které nejsou obsaženy v klasické teorii. Bohužel ani po mnoha letech teoretického výzkumu není problém uspořádání vyřešen.

DeWitt chápe \mathcal{G}_{ijkl} jako *kontravariantní* metriku šestirozměrné variety [6]. Potom je možné chápat první člen v 3.11 jako jistý případ Laplaceova-Beltramiho operátoru [6], který je možné zapsat jako [18]

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^A} \left(\sqrt{g} g^{AB} \frac{\partial}{\partial x^B} \right). \quad (3.12)$$

Laplaceův-Beltramiho operátor je invariantní vzhledem k souřadnicovým transformacím. Potom je možné zvolit uspořádání v prvním členu WD rovnice 3.11 odpovídající LB operátoru.

Další problém spojený s WD rovnicí je otázka okrajových podmínek. Pokud chápeme ψ jako nulový vlastní vektor příslušný k vlastní hodnotě 0, musíme stanovit okrajové podmínky pro ψ a její první derivace [17]. Při řešení konkrétních jednoduchých příkladů se ukazuje, že vhodná řešení splňující okrajové podmínky často neexistují. Jak ukážeme v páté kapitole, to zda-li řešení splňuje okrajové podmínky může záviset na uspořádání operátorů a částečně tedy může napomoci k omezení množiny možných uspořádání operátorů.

Problematický je také samotný fyzikální význam WD rovnice. I když předpokládáme, že WD rovnice obsahuje veškerou fyzikální informaci o gravitačním systému, tak v podstatě nevíme v jakém smyslu. Dokud nebude možné ověřit měřením nějakou interpretaci funkcionálu ψ , nebude možné jednoznačně rozhodnout o jeho správném fyzikálním významu. A tak se dostáváme k problému, který lze různými cestami propojit prakticky se všemi výše uvedenými problémy, a to je problém časového vývoje.

3.3 Časový vývoj

V kanonické kvantové teorii gravitace nemáme časový vývoj v obvyklém smyslu, místo toho máme jen v podstatě libovolné funkce N , N^a (místo časového vývoje máme do značné míry libovolný difeomorfismus $\mathbb{R} \times \Sigma \rightarrow M$), protože dynamické rovnice nevedou k jejich určení. V kvantové mechanice souvisí časový vývoj s interpretací vlnové funkce [17]. Jestliže nemáme v CQG časový vývoj, jak máme vlnovou funkci interpretovat? Otázka nutně vede k potřebě nějakým způsobem do teorie opět zavést časový vývoj. S následnou interpretací ψ souvisí zavedení skalárního součinu.

Základním východiskem je koncept vnitřního času (Baierlein, Sharp, Wheeler). Podrobné shrnutí je možné najít v [17]. V klasické a kvantové fyzice máme vždy při pozorování fyzikálních systémů k dispozici i jiný systém, který je mimo pozorovaný systém; samozřejmě jsou to nějak realizované hodiny. Ale v OTR nemáme žádný vnější systém mimo systém sledovaný, kterým je časoprostor. Je přirozené chtít sledovat prostor z časoprostoru, ale takovou snahu zhatí libovlnnost funkcí N , N^a . A to nás nutí k úvaze, že časový vývoj je v CQG ve skutečnosti nepodstatný a má za úkol pouze přibližně (fenomenologicky) popsat průběh fyzikálních dějů. Na takovém stanovisku stojí bezčasová interpretace CQG. Interpretace vlnové funkce potom bude obdobná jako v kvantové mechanice. To se někdy nazývá schrödingerovská interpretace a skalární součin potom je

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle := \int \mathcal{D}q \, \psi_1^* \psi_2 \quad (3.13)$$

Všeobecně v případě konceptu vnitřního času je čas třeba ztotožnit s nějakou geometrickou proměnnou (tedy s některým koeficientem q_{ab}) nebo s veličinou nějaké hmoty v prostoru. V druhém případě tedy vystupuje hmota jako hodiny a pozorovaným systémem je geometrie, nebo naopak. Taková interpretace nevychází z WD rovnice, a do jisté míry jde proto o nekonzistentní interpretaci.

DeWitt zavedl skalární součin, který vychází z WD rovnice. Dokázal, že \mathcal{G}_{abcd} z rovnice 3.11 je metrický tenzor na prostoru metrik q_{ab} a na základě formální podobnosti 3.11 s Kleinovou-Gordonovou rovnicí definoval skalární součin jako v Kleinově-Gordonově teorii [6]. Jeden koeficient metriky q_{ab} je zvolen jako časová souřadnice kolmá na zbývajících souřadnicích q_{ab} . Potom máme šesti-rozměrnou "časoprostorovou" nadplochu¹ a časový vývoj je popisován v tomto prostoru. Naneštěstí vznikají obdobné problémy jako v Kleinově - Gordonově teorii, konkrétně skalární součin může nabývat záporných hodnot a k tomu nemáme jasnou interpretaci.

¹Se signaturou $(-++++)$.

Kapitola 4

Poznámky ke kosmologii

4.1 RW řešení

V této kapitole budou uvedeny některé jednoduché základy klasické kosmologie [7], [20]. Podrobněji si všimneme sféricky symetrického řešení, které v podobě RW (Robertson-Walker) metriky předpokládá hmotný zdroj, protože v tomto případě jsou nenulové složky Einsteinova tenzoru. Základy jednoduché kosmologie je možné vybudovat pomocí tří předpokladů. První je kosmologický princip.

Kosmologický princip: *V každé epoše vývoje vesmíru je fyzikální informace o jeho struktuře stejná (tj. vesmír "vypadá" stejně) v každém místě s výjimkou lokálních nepravidelností.*

Lokální nepravidelnosti se rozumí zvláště vnitřní struktura galaxií, která je v kosmologických úvahách zcela zanedbána. Galaxie (nebo shluky galaxií) se chápou jako hmotné body homogenně a izotropně umístěné v prostoru, což lze alespoň přibližně považovat za experimentálně prověřené [7], [15], tj. kosmologický princip platí v naší epoše a my jeho platnost přenášíme do ostatních epoch, což je předpoklad. Obsahem kosmologického principu je i tvrzení o nejedinečnosti umístění naší galaxie (rozuměj naše místo jako pozorovatelů ve vesmíru), a proto bývá také nazýván zobecněným Kopernikovým principem. Prostor je tudíž podle kosmologického principu homogenní a izotropní, to znamená, že musí jít o prostor s konstantní křivostí. Takové prostory se nazývají sféricky symetrické a platí pro ně [7], [11]

$$R_{abcd} = K(q_{ac}q_{bd} - q_{ad}q_{bc}) \quad (4.1)$$

$$ds_p^2 = e^\lambda dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (4.2)$$

Ve vztahu 4.1 je K konstantní sekční křivost a elementární interval ds_p^2 je

platný pro sféricky symetrické prostory. Vztahy 4.1, 4.2 vyjadřují matematickou formou kosmologický princip. Druhý předpoklad je Weylův postulát.

Weylův postulát: *Částice kosmické kapaliny leží v časoprostoru na časupodobných geodetikách divergujících z bodu v konečné nebo nekonečné minulosti.*

Postulát v podstatě říká, že obsah vesmíru lze chápat jako ideální tekutinu, jejíž částice leží na geodetikách kolmých k prostorové nadploše. Tvzení o divergenci časupodobných geodetických čar má zajistit, že pro každou částici kosmického substrátu máme jen jednu geodetiku, která se neprotla ani neprotne s jinou, kromě singulárních bodů. Zavádí se pojem souběžných souřadnic, tj. takových souřadnic, které jsou konstantní podél geodetik. Kolmost geodetik k prostorovým nadplochám daným pro nějaký čas lze vyjádřit v předpokladu o tvaru metrického tenzoru jako

$$ds^2 = -dt^2 + S(t)^2 q_{ab} dx^a dx^b. \quad (4.3)$$

Zde jsme navíc uplatnili předpoklad o prostorové homogenitě a izotropii, který je použit v předpokladu o konformnosti prostorové metriky. Dodejme, že Weylův postulát v podstatě zavádí třídu preferovaných souřadných systémů a také konkrétní tvar tenzoru energie-impulsu. Z uvedených dvou postulátů můžeme odvodit RW interval ve tvaru

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + a^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2 \right), \quad (4.4)$$

kde $k := \frac{K}{|K|}$ je normovaná sekční křivost nabývající hodnot 0, 1 a -1 , což odpovídá plochému, uzavřenému a otevřenému prostoru. N je vývojová funkce významná pro hamiltonovskou formulaci OTR a $a(t) = \frac{S(t)}{\sqrt{K}}$ pro $K \neq 0$ nebo $a(t) = S(t)$ pro $K = 0$.

Poslední kosmologickým předpokladem je **platnost Einsteinových rovnic**.

Věnovali jsme pozornost pouze RW metrice, protože jde o historicky první kosmologická řešení a tato metrika bude v dalších výpočtech používána.

4.2 Skalární pole jako gravitační zdroj, inflace

S použitím RW metriky a Weylova postulátu, který vedle podmínky 4.3 udává i podmínku na tenzor energie-impulsu, získáme Einsteinovy rovnice

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi}{3} \rho - \frac{k}{a^2} \quad (4.5)$$

$$2 \left(\frac{\ddot{a}}{a} \right) + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} = -8\pi\rho. \quad (4.6)$$

V těchto rovnicích, které jsou zapsané v relativistických jednotkách, je ρ hustota hmoty a p tlak. V rámci obecnějšího kosmologického výzkumu můžeme k levým stranám přičíst záporně vzatou kosmologickou konstantu, ale my budeme používat uvedenou zjednodušenou formu. Ze známých řešení vyberme případy kdy $k = 0$. Potom máme klasická řešení rozdělující vývoj kosmologického modelu zhruba na dvě části:

1. Období ve kterém dominuje záření: $p = \rho/3$ $a \approx t^{\frac{1}{2}}$ $\rho \approx a^{-4}$
2. Období ve kterém dominuje hmota: $p = 0$ $a \approx t^{\frac{2}{3}}$ $\rho \approx a^{-3}$

Často se používá tzv. kritická hustota, kterou obdržíme z Friedmannovy rovnice 4.5 pro případ kdy $k = 0$ a hustota se potom uvádí ve tvaru zlomku $\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c}$. Takto připraveni můžeme zapsat Friedmannovu rovnici v podobě

$$|\Omega - 1| = \frac{|k|}{\dot{a}^2}, \quad (4.7)$$

a proto například pro období, kdy dominuje záření získáme $|\Omega - 1| \approx t$. Je tedy jasné, že Ω se v čase vyvíjí z hodnoty jedna. Měření ukazují, že v současné době nabývá Ω hodnot blízko jedné. Proto je velmi obtížné vybrat počáteční hustotu, která by vedla k vývoji našeho vesmíru tak, jak ho známe dnes. To bývá nazýváno problém kritické hustoty, nebo též problém plochosti (rovnosti) prostoru.

Další problém standartních kosmologických modelů je, jakým způsobem máme vysvětlit vysoký stupeň homogenity mikrovlnného kosmického záření. Tuto homogenitu lze nejlépe vysvětlit tím, že záření je v tepelné rovnováze. K nastolení tepelné rovnováhy je ale potřeba, aby vzdálenost horizontu vesmíru byla menší než vzdálenost, kterou mohly urazit fotony od počátku vesmíru.

Řešení uvedených problémů nabízí teorie inflace. V rámci této teorie nastala v počátečním období vývoje vesmíru fáze během níž došlo k velmi rychlé expanzi. Období inflace je potom definováno jako doba kdy platí

$$\ddot{a} > 0. \quad (4.8)$$

Tradičním způsobem, jak vytvořit tuto fázi, je použít jako gravitační zdroj skalární pole. Tenzor energie-impulzu pro skalární pole je

$$T_{\mu\nu} = \phi_{;\mu}\phi_{;\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\phi_{;\eta}\phi_{;\xi}g^{\eta\xi} + V(\phi)), \quad (4.9)$$

kde $V(\phi)$ je potenciál skalárního pole. Uvádějí se tyto případy

$$V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2 \quad (4.10)$$

$$V(\phi) = \alpha(\phi^2 - M^2)^2 \quad (4.11)$$

$$V(\phi) = \alpha\phi^4 \quad (4.12)$$

přitom pouze první případ je fyzikálně opodstatněný a skalární pole v tomto případě může reprezentovat mezony. Druhý případ je Higgsův potenciál. Vyskytují se i jiné potenciály modelující různé druhy inflací. Je možné se setkat i s potenciálem vytvořeným pomocí dvou polí. Jako nultý člen potenciálu skalárního pole je možné uvažovat kosmologickou konstantu.

Existuje několik inflačních řešení, které jsou založeny na přibližném řešení Einsteinových rovnic. V nejjednoduším případě se předpokládá, že v počátcích vývoje vesmíru dominoval potenciálový člen 4.10. Řešením je potom exponenciální závislost poloměru vesmíru na čase.

Tato část měla alespoň částečně ospravedlnit následující výpočty v rámci kvantové teorie gravitace.

Kapitola 5

Homogenní a izotropní kosmologický model se skalárním polem

5.1 Klasický model

Studium homogenních a izotropních kosmologických modelů se skalárním polem je motivováno především teorií inflace, která nabízí řešení některých kosmologických problémů. Pracujeme stále v absolutních jednotkách, takže máme $\hbar = c = \kappa = 1$. Einsteinovy rovnice a rovnice skalárního pole jsou

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = T_{\mu\nu} \quad (5.1)$$

$$\frac{\delta L}{\delta \phi} = 0, \quad (5.2)$$

kde $T_{\mu\nu}$ je tenzor energie-impulzu, ϕ skalární pole a L Lagrangeova funkce skalárního pole. Požadavek homogenity a izotropie vede k použití RW metricky

$$ds^2 = -dt^2 + a^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2 \right), \quad (5.3)$$

přičemž a je škálovací parametr a k normovaná sekční křivost, která může nabývat hodnot $+1$, -1 a 0 , což odpovídá uzavřenému, otevřenému a rovnému vesmíru. Tenzor energie-impulzu skalárního pole je

$$T_{\mu\nu} = \phi_{;\mu}\phi_{;\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\phi_{;\eta}\phi_{;\xi}g^{\eta\xi} + V(\phi)). \quad (5.4)$$

Lagrangeova funkce je definována jako

$$L_M = -(\phi_{;\mu}\phi_{;\nu}g^{\mu\nu} + V(\phi)). \quad (5.5)$$

Dosazením RW metriky získáme

$$L = \int \sqrt{-g} \left(\dot{\phi}^2 - V(\phi) \right) d^3r. \quad (5.6)$$

Rovnice pole potom jsou

$$3 \left[\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right] = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \quad (5.7)$$

$$2 \left(\frac{\ddot{a}}{a} \right)^2 + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} = -\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \quad (5.8)$$

$$\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0. \quad (5.9)$$

Ve výše uvedených vztazích označují tečky derivaci podle času. První dvě rovnice jsou $R_{00} = T_{00}$ a $R_{ii} = T_{ii}$, třetí rovnice je dynamická rovnice pro skalární pole.

Výběr potenciálu V je velmi důležitý, protože poskytuje různé inflační modely. V souvislosti s modelováním inflace jsou také studovány potenciály sestávající z více druhů polí. Jednou z možných voleb je také potenciál obsahující kosmologickou konstantu. Dalším předmětem studia je případ nulového potenciálu, ale nehmotné skalární pole není potvrzeným obrazem žádného fyzikálního pole a navíc v inflační fázi vývoje vesmíru s látkou představovanou hmotným skalárním polem dominuje potenciálový člen. V teoriích vystupuje nehmotné skalární pole zřídka, např. v Bransově-Dickově teorii gravitace, kde nehmotné skalární pole představuje gravitační parametr v dnešní epoše vesmíru identifikovaný jako gravitační konstanta. Dále se nehmotné skalární pole vyskytuje jako reprezentant čistě hypotetické částice, totiž dilatonu.

Uvedeme některé poznatky z řešení rovnic 5.7, 5.8, 5.9. Tyto rovnice nejsou navzájem nezávislé: rovnicí 5.8 získáme lineární kombinací rovnic 5.7, 5.9. Obecně, máme-li více diferenciálních rovnic než neznámých funkcí, nemusí průnik jejich řešení existovat. Pokud řešení existuje, můžeme jednu z rovnic chápat jako diferenciální podmínku. Systém rovnic 5.7, 5.8, 5.9 se z pravidla řeší přibližnými metodami. Úplné analytické řešení lze nalézt pro plochý model s nehmotným skalárním polem. Rovnice 5.7, 5.8, 5.9 potom přejdou do

tvaru

$$3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{\dot{\phi}^2}{2} \quad (5.10)$$

$$2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) + 3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = -\frac{\dot{\phi}^2}{2} \quad (5.11)$$

$$\ddot{\phi} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\phi} = 0. \quad (5.12)$$

Z třetí rovnice vyjádříme $\frac{\dot{a}}{a}$ a dosadíme do prvních dvou rovnic. Po jejich součtu získáme

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}} \right) = \left(\frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}} \right)^2, \quad (5.13)$$

což je diferenciální rovnice třetího řádu v níž lze separovat proměnné, a to také po každém integračním kroku. Získáme tak řešení pro ϕ a po dosazení do 5.12 získáme řešitelnou rovnici pro a . Řešení potom jsou

$$\phi = \ln [c_3 (t + c_1)]^{c_2} \quad (5.14)$$

$$a = [c_4 (t + c_1)]^{\frac{1}{3}}. \quad (5.15)$$

Zpětným dosazením do rovnic 5.7, 5.8, 5.9 je možné dokázat, že rovnice pole jsou splněny jen tehdy, když $c_2^2 = \frac{2}{3}$, což je třeba chápat jako důsledek toho, že máme více rovnic než neznámých. Označme

$$a(t=0) \equiv a_0 \quad \dot{a}(t=0) \equiv \dot{a}_0 \quad \phi(t=0) \equiv \phi_0 \quad \dot{\phi}(t=0) \equiv \dot{\phi}_0. \quad (5.16)$$

Řešení je potom

$$\phi = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \ln \left[\left(1 + 3 \frac{\dot{a}_0}{a_0} t \right) \exp \pm \sqrt{\frac{3}{2}} \phi_0 \right] = \phi_0 + \ln \left(1 + 3 \frac{\dot{a}_0}{a_0} t \right) \quad (5.17)$$

$$a^3 = a_0^3 \left(1 + 3 \frac{\dot{a}_0}{a_0} t \right). \quad (5.18)$$

Přičemž byla použita podmínka na c_2^2 , která je $\pm 3 \sqrt{\frac{2}{3}} = \dot{\phi}_0 \frac{a_0}{\dot{a}_0}$. Jak je patrné objem (je třeba vybrat nějaký konečný pozorovací objem) vesmíru roste nebo klesá lineárně s časem. Protože a_0 je definován na \mathbb{R}^+ , závisí vývoj vesmíru na znaménku jeho počáteční rychlosti rozpínání (eventuálně smršťování). V případě, že první derivace škálovacího parametru v čase nula nabývá záporných hodnot, dojde ke kolapsu. V takovémto případě je tedy doba existence konečná a je rovna $t_m = \frac{1}{3} \frac{a_0}{\dot{a}_0}$. Naopak, je-li v čase nula rychlost rozpínání

kladná, roste objem s časem nade všechny meze a doba života vesmíru je v tomto případě nekonečná. V každém případě jde o nestabilní model vesmíru u něhož není možný vývoj z $a_0 = 0$, neboť funkce pro ϕ má v tomto místě singularitu.

Z rovnic 5.17, 5.18 můžeme vyloučit čas a dostaneme

$$\pm\sqrt{\frac{3}{2}}(\phi - \phi_0) = \ln\left(\frac{a}{a_0}\right)^3. \quad (5.19)$$

Je tedy směrnice tečny v $a\phi$ rovině $\frac{d\phi}{da} = \pm 3\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{1}{a}$, což je právě podmínka na konstantu c_2 , tj. $\pm 3\sqrt{\frac{2}{3}} = \dot{\phi}_0 \frac{a_0}{a_0}$.

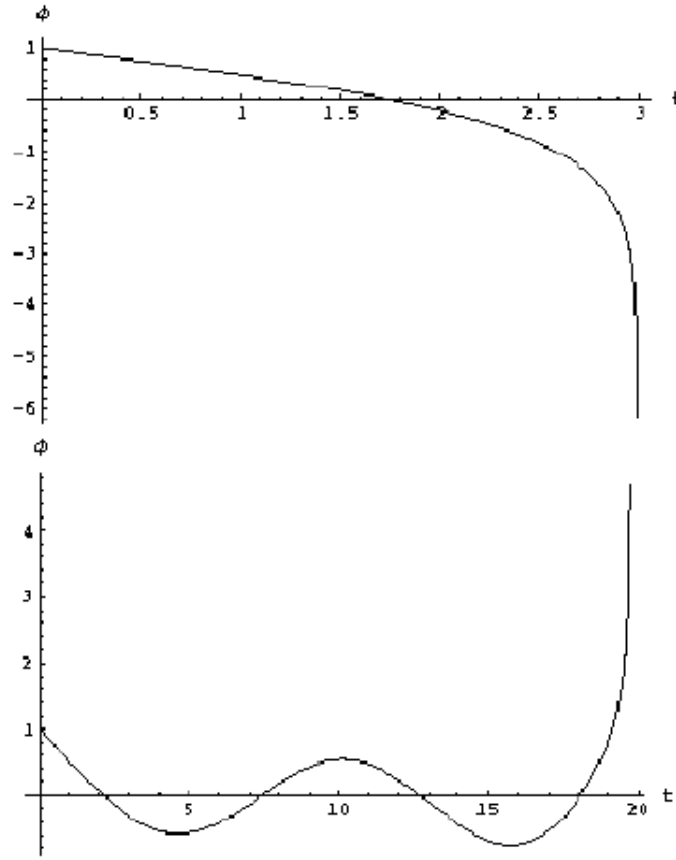
Samozřejmě uvedená řešení jsou velmi jednoduchá. Řešení pro funkci ϕ vedoucí ke kolapsu jak byla výše uvedena byly publikovány v [16]. (Řešení vedoucí k nekonečnému vývoji ve stejném článku ale nejsou.) V uvedené publikaci se autoři dále soustředí na numerické řešení rovnic pro případ hmotných polí a v zakřiveném časoprostoru, tj. pro $k = \pm 1$. Ukazuje se při tom, že v pozdějších fázích vývoje takových modelů jest řešení (nebo alespoň některá řešení) úměrné $(t_m - t)^{-4}$. V článku uvedená řešení tedy vždy předpovídají konečnou dobu trvání, ale to v principu není důkaz, že neexistují řešení s $k = -1$, která by modelovala případy nekonečného vývoje. Důležité je, že takový důkaz existuje pro případ nehmotného skalárního pole v prostoru s křivostí $k = 1$, tj. pro uzavřený typ vesmíru s konečným objemem. Ve [4] je dokázáno, že všechny časupodobné křivky v časoprostoru s $k = 1$ s nehmotným skalárním polem mají konečnou délku. Jinak řečeno, eventuelní pozorovatel má jistě konečnou délku života. To lze zaměnit za tvrzení, že dojde k prostorovému kolapsu. Je možné, že konečnost v čase je obecnou vlastností kosmologických modelů s uzavřenou topologií.

Nyní uvedeme několik poznámek k hamiltonovskému formalismu. Začínáme s akcí

$$S = \int c\left(\frac{1}{\kappa}L_G + L_M\right)d\Omega, \quad (5.20)$$

kde $d\Omega$ je časoprostorový element, L_G geometrická Lagrangeova funkce, L_M Lagrangeova funkce hmoty, c je rychlost světla a κ je Einsteinova gravitační konstanta $\kappa = \frac{8\pi G}{c^2}$. Opět budeme používat absolutní jednotky. V rámci teorie je $L_G = R$ a variace příslušné Einsteinovy-Hilbertovy akce vede na známé Einsteinovy rovnice. V případě skalárního pole je

$$L_M = -(\phi_{;\mu}\phi_{;\nu}g^{\mu\nu} + V(\phi)), \quad (5.21)$$



Obrázek 5.1: Dvě numerická řešení pro hmotnost $m = 0,1$ a $m = 0,6$. Jde vidět, že větší hmotnost prodlužuje dobu trvání vesmíru. Převzato z [16].

což v případě RW metriky dává $L_M = N^{-2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)$ a

$$L_G + L_M = 6 \left(\frac{\ddot{a}}{aN^2} - \frac{\dot{N}}{N^3} \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{N^2 a^2} + \frac{k}{a^2} \right) + \frac{\dot{\phi}^2}{N^2} - V(\phi) \quad (5.22)$$

$$= 6 \left(\frac{1}{a^3 N} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{a} a^2}{N} \right) - \frac{\dot{a}^2}{N^2 a^2} + \frac{k}{a^2} \right) + \frac{\dot{\phi}^2}{N^2} - V(\phi) \quad (5.23)$$

Časoprostorový element je $d\Omega = \frac{Nr^2 a^3 \sin \vartheta}{\sqrt{1-kr^2}} dt d\varphi d\vartheta dr$. Patrně $L_G + L_M$ není funkcí prostorových souřadnic, a proto můžeme akci 5.20 integrovat přes prostor, čímž získáme Lagrangeovu funkci v obvyklém mechanickém smyslu. Samozřejmě v případě otevřeného a plochého modelu musíme integrovat přes nějaký konečný objem. Navíc vypouštíme dynamicky irelevantní člen, který

je úplnou derivací podle času. Tak získáme Lagrangeovu funkci

$$L = \Upsilon \left[6 \left(-\frac{a\dot{a}^2}{N} + Nka \right) + N^{-1}a^3\dot{\phi}^2 - Na^3V(\phi) \right], \quad (5.24)$$

kde $\Upsilon = 2\pi^2/k^{3/2}$ pro $k = 1$ a $\Upsilon = 2\pi(r_0\sqrt{1+r_0^2} - \ln|r_0 + \sqrt{1+r_0^2}|)$ pro $k = -1$. V dalším budeme výhradně používat Lagrangeovu funkci zavedenou jako $L \rightarrow L/\Upsilon$. Nyní již obvyklým způsobem vypočítáme Hamiltonovu funkci

$$H = N \left[-6 \left(\frac{1}{144} \frac{p_a^2}{a} + ka \right) + \frac{1}{4} \frac{p_\phi^2}{a^3} + a^3V(\phi) \right], \quad (5.25)$$

kde vystupují impulzy kanonicky sdružené s proměnnými a a ϕ , to jest

$$p_a := \frac{\partial L}{\partial \dot{a}} = -12 \frac{a\dot{a}}{N} \quad (5.26)$$

$$p_\phi := \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = 2 \frac{a^3\dot{\phi}}{N}. \quad (5.27)$$

V případě nehmotného pole nalezneme z Hamiltonových rovnic, že kanonický impuls skalárního pole je konstantní pro libovolnou sekční křivost, tj, $\dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0$.

Závěrem uveďme hamiltonián v jednotkách SI vycházející z akce 5.20

$$H = N \left[-6 \left(\frac{1}{144} \frac{\kappa p_a^2}{c a} + \frac{c}{\kappa} ka \right) + \frac{1}{4c} \frac{p_\phi^2}{a^3} + ca^3V(\phi) \right]. \quad (5.28)$$

5.2 Kvantový model

Podle kanonické kvantové teorie gravitace je vlnová funkce obsahující úplnou informaci o vesmíru se skalární polem řešením příslušné WD rovnice 3.11. Každý, kdo chce tuto rovnici řešit, je postaven před několik otázek:

1. Klasická veličina a je "poloměr" vesmíru a platí pro něj $a \geq 0$. Jestliže zvolíme a -reprezentaci, jaký je smysl záporných hodnot operátoru \hat{a} ? S tím souvisí i další bod.
2. Jaké konkrétní operátory reprezentující klasické veličiny máme použít?
3. Jsou možné reprezentace ekvivalentní? Přirozeně máme na mysli p -reprezentaci a a -reprezentaci. Jestliže nikoliv, kterou máme zvolit?
4. Jakým způsobem máme uspořádat operátory ve členu $\frac{p_a^2}{a}$? To je známo jako problém uspořádání operátorů.
5. Požadujeme, aby byl operátor $\hat{\mathcal{H}}$ samosdružený?

Krátce se zde o těchto problémech zmíníme. V a -reprezentaci nabývají vlastní čísla operátoru \hat{a} hodnoty z \mathbb{R} . Pokud omezíme možné vlastní hodnoty na \mathbb{R}^+ nebude operátor impulzu kanonicky sdruženého s \hat{a} samosdružený [1]. V principu můžeme zvolit nějakou kanonickou transformaci k proměnné, která bude nabývat hodnot z \mathbb{R} . Například je možno zvolit $x = \ln a$. Dalším nezřídka používaným řešením je daný problém ignorovat.

Jednou z možností, jak řešit problém nastíněný v prvním bodě je použití samosdružených operátorů na $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^+, \frac{da}{a})$, které ale potom musejí reprezentovat odlišné fyzikální veličiny, než v případě souřadnice a k ní sdruženého impulzu. Operátory můžeme zvolit tak, že jsou splněny relace 3.10. K tomuto se vrátíme v poznámce k bodu 4.

Jestliže zvolíme a -reprezentaci, je příslušná WD rovnice diferenciální rovnicí druhého řádu. V p -reprezentaci získáme diferenciální rovnici prvního řádu. Rozbor jednoduchých příkladů [19] ukazuje, že tyto reprezentace nemusejí být ekvivalentní. Mají-li být reprezentace ekvivalentní, musí být stanoveny okrajové podmínky na funkci, která je řešením WD rovnice. My v dalším používáme a -reprezentaci.

Problém uspořádání operátorů je dlouhodobě nevyřešený. My se tomuto problému vyhneme po technické stránce. Budeme používat do jisté míry libovolnou strukturu uspořádání, a to tak, že operátory přiřadíme následujícím způsobem

$$\frac{p^2}{a} \longmapsto -\frac{1}{a^i} \frac{\partial}{\partial a} \frac{1}{a^j} \frac{\partial}{\partial a} \frac{1}{a^k}, \quad (5.29)$$

přítom pro reálná čísla i, j, k platí $i + j + k = 1$. V případě symetrického uspořádání je výhodnější používat následující tvar

$$\frac{p^2}{a} \longmapsto -\frac{1}{a^{\frac{1}{2}(1-j)}} \frac{\partial}{\partial a} \frac{1}{a^j} \frac{\partial}{\partial a} \frac{1}{a^{\frac{1}{2}(1-j)}}. \quad (5.30)$$

Uvedený způsob obecného zápisu uspořádání operátorů samozřejmě neřeší podstatu problému, ale na základě řešení získaných pomocí 5.29 a 5.30 je možné provést diskuzi o vlivu uspořádání na výsledek.

Zde je výhodné vrátit se k druhému bodu. Uvažujme klasickou veličinu definovanou jako $\pi := ap$. Příslušné Poissonovy závorky jsou $\{a, \pi\} = a$. Tomu odpovídají komutační relace $[\hat{a}, \hat{\pi}] = i\hat{a}$ pro operátory

$$\hat{a}\psi := a\psi \quad \hat{\pi}\psi := -ia\frac{\partial\psi}{\partial a}. \quad (5.31)$$

Volba operátorů 5.31 řeší problém v prvním bodu. Je nyní na klasické úrovni $\frac{p^2}{a} = \frac{\pi^2}{a^3}$. Zdůrazněme, že uspořádání symetrické pro operátory 5.31 přejde formálně na uspořádání nesymetrické ve smyslu 5.29. Bude tedy smysluplné se v budoucnu zabývat uspořádáním nesymetrickým ve smyslu 5.29 ve tvaru

$$-\frac{1}{a^{\frac{1}{2}(3-j)-1}} \frac{\partial}{\partial a} \frac{1}{a^{j-1}} \frac{\partial}{\partial a} \frac{1}{a^{\frac{1}{2}(3-j)}}. \quad (5.32)$$

Operátory 5.31 jsou samosdružené na $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^+, \frac{da}{a})$ [17]. Každá celočíselná mocnina hermiteovského operátoru je hermiteovský operátor. Součin dvou hermiteovských operátorů není obecně hermiteovský operátor, ale tento součin je možné rozložit na součet částí, která je hermiteovská, a částí, která není hermiteovská. Potom můžeme hermiteovský operátor reprezentující veličinu $\frac{\pi^2}{a^3}$ utvořit z hermiteovské části tohoto rozkladu jako¹

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^3} \hat{\pi} \hat{\pi} + \hat{\pi} \hat{\pi} \frac{1}{a^3} \right). \quad (5.33)$$

Později provedená analýza ukazuje, že i tento případ lze zahrnout do obecného uspořádání 5.29, ale čísla i, j, k musejí být komplexní [viz.5.69].

S problémem uspořádání souvisí také otázka samosdruženosti operátoru $\hat{\mathcal{H}}$. Vhodný výběr uspořádání může způsobit samosdruženost operátoru $\hat{\mathcal{H}}$ a naopak. Problém je, že nevíme, zda-li má být tento operátor samosdružený. Je snad přirozené požadovat aby operátor $\hat{\mathcal{H}}$ byl samosdružený, protože jsou samosdružené operátory \hat{a} a \hat{p} ? Možná, ale jak už bylo naznačeno, uvedené operátory nemusí být samosdružené na fyzikálním intervalu. Dodejme, že veličina reprezentovaná $\hat{\mathcal{H}}$ pozorovatelnou není.

¹Toto přirozené uspořádání navrhl T. Tyc v trochu jiných souvislostech na semináři o základech kvantové fyziky.

5.2.1 Wheelerova-DeWittova rovnice

V kapitolách 2, 3 bylo ukázáno, že když platí Einsteinovy rovnice, musí platit hamiltonovská vazba a naopak. Diracovo kvantování vede na

$$\hat{\mathcal{H}}\psi = 0. \quad (5.34)$$

K získání operátoru $\hat{\mathcal{H}}$ můžeme použít přímo vztah 3.11 s použitím Wheelerovy funkcionální reprezentace a DeWittovou metrikou, ale jednodušší a rychlejší je dospět ke stejnému výsledku použitím již získaných výsledků v rámci hamiltonovského formalismu v kapitole 5. Tam byl nalezen hamiltonián

$$H = N \left[-6 \left(\frac{1}{144} \frac{p_a^2}{a} + ka \right) + \frac{1}{4} \frac{p_\phi^2}{a^3} + a^3 V(\phi) \right], \quad (5.35)$$

který je až na multiplikativní konstantu roven hamiltonovské hustotě \mathcal{H} . Zvolíme-li a -reprezentaci a operátory

$$\hat{a}\psi(a, \phi) := a\psi(a, \phi) \quad \hat{p}_a\psi(a, \phi) := -i \frac{\partial \psi(a, \phi)}{\partial a} \quad (5.36)$$

$$\hat{\phi}\psi(a, \phi) := \phi\psi(a, \phi) \quad \hat{p}_\phi\psi(a, \phi) := -i \frac{\partial \psi(a, \phi)}{\partial \phi} \quad (5.37)$$

nebo jako 5.31, získáme WD rovnici ve tvaru²

$$\left(\frac{1}{24} \frac{1}{a^i} \frac{\partial}{\partial a} \frac{1}{a^j} \frac{\partial}{\partial a} \frac{1}{a^k} - \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - 6\tilde{k}a + a^3 V(\phi) \right) \psi(a, \phi) = 0. \quad (5.38)$$

Zadáním je vyšetřit tuto rovnici pro hmotné nebo nehmotné skalární pole, když zároveň $\tilde{k} \neq 0$. Povšiměme si nejprve semiklasické limity. Za tím účelem předpokládejme řešení 5.38 ve tvaru $\psi = e^{\frac{i}{\hbar}S}$, přitom je třeba si uvědomit, že \hbar vystupuje v 5.38 v relativistických jednotkách jen u členů s derivacemi. Po dosazení získáme

$$-6 \left(\frac{1}{144} \frac{1}{a} \left(\frac{\partial S}{\partial a} \right)^2 + \tilde{k}a \right) + \frac{1}{4a^3} \left(\frac{\partial S}{\partial \phi} \right)^2 + a^3 V(\phi) + i\hbar[\dots] = 0, \quad (5.39)$$

kde pouze v hranaté závorce u \hbar jsou členy závislé na číslech i, j, k . Část rovnice, která nestojí u \hbar je rovnice Hamiltonova-Jacobiho. Z toho plyne závěr, že na základě semiklasické limity nelze rozhodnout o uspořádání operátorů.

²V této části označujeme normovanou křivost \tilde{k} .

Rovnice 5.38 je lineární parciální diferenciální rovnice druhého řádu ve dvou proměnných a a ϕ . Je vidět, že v případě nulového potenciálu lze v této rovnici oddělit proměnné. Řešit tuto rovnici pro případ nulového potenciálu není docela fyzikálně nesmyslné, pokud předpokládáme, že v pozdějších fázích vývoje vesmíru se skalárním polem je dominantní první člen z 5.21.

Separací proměnných získáme systém dvou diferenciálních rovnic pro vlnové funkce $A(a)$ a $\varphi(\phi)$, které souvisí s původní vlnovou funkcí vztahem $\psi(a, \phi) = A(a)\varphi(\phi)$. Systém rovnic je

$$\frac{1}{a^i} \frac{\partial}{\partial a} \frac{1}{a^j} \frac{\partial}{\partial a} \frac{1}{a^k} A(a) - 144\tilde{k}aA(a) + \frac{\lambda^2}{a^3} A(a) = 0 \quad (5.40)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi(\phi)}{\partial \phi^2} + \frac{\lambda^2}{6} \varphi(\phi) = 0. \quad (5.41)$$

λ je separační konstanta. Definiční obor funkce $A(a)$ je \mathbb{R}^+ , definiční obor funkce $\varphi(\phi)$ je \mathbb{R} . Pro vlnové funkce požadujeme, aby na okrajích definičních oborů nabývaly konečných hodnot (Jestliže řešíme 5.34 jako diferenciální rovnici na nulový vlastní vektor je třeba stanovit okrajové podmínky i pro derivaci hledané funkce. Toto zatím ponecháváme bez dalšího komentáře). Obecným řešením rovnice 5.41 je rovinná vlna

$$\varphi = c_1 e^{i\lambda\phi/\sqrt{6}} + c_2 e^{-i\lambda\phi/\sqrt{6}}, \quad (5.42)$$

což odpovídá klasickému výsledku, kde nám vyšel pro nehmotné skalární pole v prostoru s libovolnou křivostí (ovšem v prostoru sféricky symetrickém) konstantní impuls.

Rovnici 5.40 je možné převést do vhodného tvaru pomocí následujících úprav. První člen rozepíšeme do tvaru

$$\frac{1}{a^i} \frac{\partial}{\partial a} \frac{1}{a^j} \frac{\partial}{\partial a} \frac{A}{a^k} = \frac{A''}{a} - (j+2k) \frac{A'}{a^2} + k(j+k+1) \frac{A}{a^3}, \quad (5.43)$$

kde jsme využili vztahu $i+j+k=1$. Čárky značí derivaci podle a . Substitucí $6a^2 \equiv b$ dostaneme pro 5.40

$$b^2 \frac{\partial^2 A}{\partial b^2} + \frac{1}{2}(1-j-2k)b \frac{\partial A}{\partial b} - b^2 \tilde{k}A + \frac{k(j+k+1) + \lambda^2}{4} A = 0. \quad (5.44)$$

U každé rovnice typu 5.44 lze substitucí $A \equiv b^\alpha B$ s vhodně voleným α zajistit aby u členu s bB' stála jednotková konstanta. Po dosazení $A \equiv b^\alpha B$ do rovnice 5.44 zjistíme, že požadovaná konstanta je $\alpha = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1-j-2k}{2}\right)$, tak získáme

$$B'' + \frac{B'}{b} - \left(\tilde{k} + \frac{\nu^2}{b^2}\right) B = 0, \quad (5.45)$$

kde ν je ryze imaginární číslo $\nu \equiv i\varepsilon$ a

$$\varepsilon^2 \equiv \frac{1}{16}(4\lambda^2 - (j+1)^2) \quad (5.46)$$

pro libovolné uspořádání operátorů. Pro uspořádání 5.32 máme

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{16}(4\lambda^2 - j^2) \quad (5.47)$$

přičemž jsme dosazovali $j \rightarrow j-1$ do vztahu 5.46. Číslo ε má zjevně značný vliv na řešení rovnice 5.45. Pokud bychom požadovali, aby λ^2 mohlo nabývat všech hodnot z \mathbb{R}^+ , bylo by ε reálným číslem pro symetrické uspořádání 5.30 jen tehdy, pokud by bylo $j = -1$. Pro uspořádání 5.32 by bylo ε reálné jen pro $j = 0$.

Řešení původního problému 5.40 v případě obecného uspořádání operátorů proto je

$$A(a) = (\sqrt{6}a)^{(1-(1-j-2k)/2)} B_\nu(6a^2), \quad (5.48)$$

v případě symetrického uspořádání

$$A(a) = \sqrt{6}a B_\nu(6a^2) \quad (5.49)$$

a v případě uspořádání 5.32 (což je libovolné symetrické uspořádání operátorů 5.31)

$$A(a) = (\sqrt{6}a)^{\frac{3}{2}} B_\nu(6a^2), \quad (5.50)$$

přitom funkce B jsou řešením rovnice 5.45 s odpovídajícím parametrem ν .

Nyní potřebujeme znát vhodná řešení rovnice 5.45. V případě, když $\tilde{k} = 1$ jde o modifikovanou Besselovu rovnici. Je-li $\tilde{k} = -1$ je rovnice 5.45 Besselova. Pro $\tilde{k} = 0$ jde o jednoduchou diferenciální rovnici.

Pro pořádek uvedeme obecné řešení 5.48 v jednotkách SI

$$A(a) = \left(\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{a}{l_p} \right)^{(1-(1-j-2k)/2)} B_\nu \left(\frac{3}{4\pi} \left(\frac{a}{l_p} \right)^2 \right), \quad (5.51)$$

kde l_p označuje Planckovu délku definovanou jako $l_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}$. A řešení (5.39) je

$$\varphi(\phi) = c_1 e^{i\lambda\sqrt{\frac{\kappa}{6}}\phi} + c_2 e^{-i\lambda\sqrt{\frac{\kappa}{6}}\phi}. \quad (5.52)$$

5.2.2 Řešení pro uzavřený model

Pro $\tilde{k} = 1$ máme

$$B'' + \frac{B'}{b} - \left(1 + \frac{\nu^2}{b^2}\right) B = 0, \quad (5.53)$$

na což je možné pohlížet jako na Besselovu rovnici ryze imaginárního argumentu. Její obecné řešení je možné zapsat jako [25]

$$B(b) = c_1 I_\nu(b) + c_2 K_\nu(b). \quad (5.54)$$

Ve vztahu 5.54 je $I_\nu(b) \equiv i^{-\nu} J_\nu(ib)$. Pro Besselovu funkci³ platí $J_\nu(ib) = \frac{1}{2}[H_\nu^{(1)}(ib) + H_\nu^{(2)}(ib)]$ a odtud snadno nalezneme chování funkce $I_\nu(b)$ pro velké hodnoty argumentu b na základě známého asymptotického chování Hankelových funkcí:

$$I_\nu(b) \simeq \sqrt{\frac{1}{2\pi b}} e^b \quad (5.55)$$

Protože hledáme omezené řešení položíme $c_1 = 0$.

Druhé nezávislé řešení je $K_\nu(b)$. To je Bassetova funkce (nebo funkce MacDonaldova, případně modifikovaná Besselova funkce druhého druhu) definovaná jako

$$K_\nu(b) = \frac{\pi}{2} i e^{\frac{\pi}{2}\nu i} H_\nu^1(ib) \quad (5.56)$$

Vyšetříme některé vlastnosti této funkce pokud je její argument x^2 a funkce je ryze imaginárního řádu, tj. když $\nu = i\varepsilon$. Volba argumentu⁴ x^2 souvisí s tím, že v dalším použijeme úpravy omezující argument b na \mathbb{R}^+ , což je ale plně v souladu s fyzikálními požadavky. Pro Hankelovu funkci platí

$$H_\nu^{(1)}(ix^2) = -\frac{1}{i \sin \pi \nu} (J_\nu(ix^2) e^{-i\pi \nu} - J_{-\nu}(ix^2)). \quad (5.57)$$

To jest

$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(ix^2) = & -\frac{1}{i \sin \pi \nu} e^{-i\nu\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n i^{2n+\nu}}{\Gamma(1+n)\Gamma(1+n+\nu)} \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^{4n+2\nu} + \\ & + \frac{1}{i \sin \pi \nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n i^{2n-\nu}}{\Gamma(1+n)\Gamma(1+n-\nu)} \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^{4n-2\nu}. \end{aligned} \quad (5.58)$$

³Platí pro necelá ν .

⁴Z důvodů přehlednosti označujeme zde i v následujících oddílech $x^2 \equiv 6a^2$, pokud vyšetřujeme vlastnosti funkcí splňujících 5.45.

Jestliže využijeme vlastnosti Gamma funkce $\Gamma^*(z) = \Gamma(z^*)$ a definujeme $\Gamma(1+n)\Gamma(1+n+\nu) \equiv \alpha(\varepsilon, n) + i\beta(\varepsilon, n)$ tak, že platí $(\Gamma(1+n)\Gamma(1+n+\nu))^* \equiv \alpha(\varepsilon, n) - i\beta(\varepsilon, n)$ a použijeme Eulerova vzorce, dostaneme po přímočarých výpočtech pro Basetovu funkci

$$K_{i\varepsilon}(x^2) = \frac{\pi}{\sinh \pi\varepsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{2}\right)^{2n} \left[\frac{\beta(\varepsilon, n) \cos\left(\varepsilon \ln \frac{x^2}{2}\right) - \alpha(\varepsilon, n) \sin\left(\varepsilon \ln \frac{x^2}{2}\right)}{\alpha^2(\varepsilon, n) + \beta^2(\varepsilon, n)} \right]. \quad (5.59)$$

Tím je dokázáno, že Basetova funkce ryze imaginárního řádu $i\varepsilon$ a argumentu z \mathbb{R}^+ je reálná funkce reálné proměnné x . Samozřejmě pro Hankelovu funkci prvního druhu, stejného řádu a argumentu z toho vyplývá, že je funkcí ryze imaginární. Funkce 5.56 má v nule singularitu (pro $x \rightarrow 0$ funkce nekonečně rychle kmitá).

Pro velmi malé hodnoty argumentu můžeme vzít z řady 5.56 pouze první člen a to je ihned vidět, že funkce, ačkoli má v nule singularitu nabývá v limitě pro $x \rightarrow 0$ konečných hodnot.

Asymptotické chování Basetovy funkce je

$$K_{\nu}(b) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2b}} e^{-b}, \quad (5.60)$$

jak je možné se přesvědčit ze známého asymptotického chování Hankelových funkcí. Proto je Basetova funkce pro nás vhodným řešením rovnice 5.53. Řešením rovnice 5.40 tedy v případě uzavřeného vesmíru je

$$A(a) = (\sqrt{6}a)^{(1-(1-j-2k)/2)} K_{i\varepsilon}(6a^2). \quad (5.61)$$

Pokud vybereme uspořádání 5.30 nebo 5.32, je vidět z příslušných řešení 5.49 a 5.50, že v těchto případech v limitě pro $a \rightarrow 0$ nabývá řešení nulových hodnot. Tím je splněna DeWittova podmínka kladená na vlnovou funkci. Všeobecně je tato podmínka splněna, pokud platí $1 + j + 2k > 0$. Tím je podstatně omezena množina možných nesymetrických uspořádání operátorů 5.29.

Nalezli jsme tedy řešení, která splňují požadavky kladené na vlnovou funkci, pokud je ε reálné číslo, a zároveň jsme ukázali, že reálnost ε závisí na volbě uspořádání operátorů a na oboru hodnot λ . Pokud požadujeme, aby bylo $\lambda \in \mathbb{R}$ (to je v podstatě požadavek na hodnoty impulzu pole), nezbyvá než volit uspořádání takové, že

$$j = -1 \quad (5.62)$$

pro případ symetrického uspořádání 5.30, a takové pro případ symetrického uspořádání 5.32, že

$$j = 0. \quad (5.63)$$

Jestliže zvolíme uspořádání takové, že $j \neq -1$ nemůže nabývat parametr λ libovolných hodnot pokud má být ε reálné číslo. Omezení hodnot λ závisí na uspořádání operátorů. Závislost přípustných hodnot impulsu pole na uspořádání můžeme vyjádřit tak, že

$$p_\phi \in \mathbb{R} \setminus \{M\}, \quad (5.64)$$

kde $\{M\}$ je otevřený interval $\{M\} = \left(-\sqrt{\frac{\hbar^2 \kappa}{6}} \frac{1}{2}(j+1), \sqrt{\frac{\hbar^2 \kappa}{6}} \frac{1}{2}(j+1)\right)$. Kdyby existoval argument pro nějaké uspořádání, které by omezovalo hodnoty impulsu pole podle 5.64, bylo by oprávněné se domnívat, že existuje jistá minimální hodnota impulsu pole nutná k evoluci vesmíru.

V dosavadní diskuzi jsme prozatím nechali bez povšimnutí otázku okrajových podmínek, které musí splňovat derivace funkce A . První derivace funkce 5.56 pro velmi malé hodnoty argumentu, kdy se můžeme omezit pouze na první člen v řadě představující derivaci funkce 5.56 je

$$K'_{ie}(x^2 \rightarrow 0) \simeq -\frac{\pi}{\sinh \pi \varepsilon} \frac{2\varepsilon}{x} \left[\frac{\alpha \cos(\varepsilon \ln x^2/2) + \beta \sin(\varepsilon \ln x^2/2)}{\alpha^2 + \beta^2} \right]. \quad (5.65)$$

A potom je z výsledku 5.50 jasné, že pro libovolné symetrické uspořádání samosdružených operátorů 5.31 je ⁵

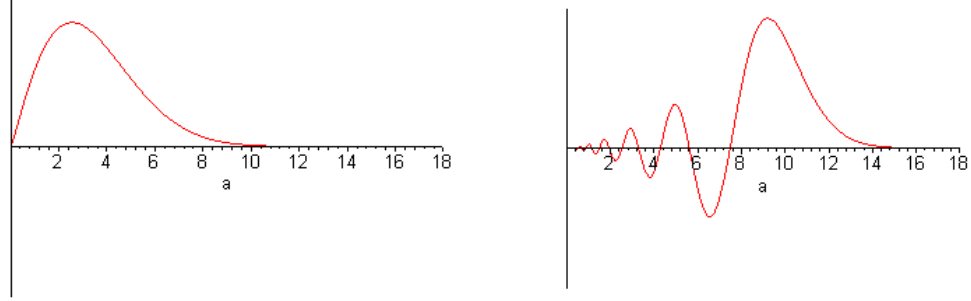
$$\lim_{a \rightarrow 0_+} \frac{\partial A(6a^2)}{\partial a} = 0, \quad (5.66)$$

ale pro libovolné symetrické uspořádání operátorů, které nejsou samosdružené, limita pro první derivaci funkce 5.49 neexistuje.

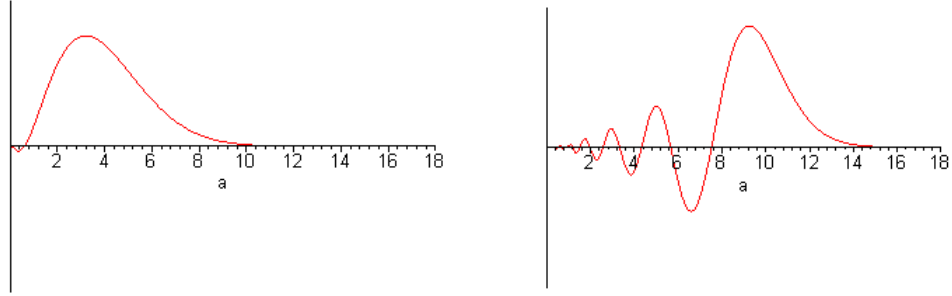
Pro symetrické uspořádání můžeme vypočítat

$$\int_{0_+}^{\infty} \frac{A_1}{a^{\frac{1}{2}(1-j)}} \frac{\partial}{\partial a} \frac{1}{a^j} \frac{\partial}{\partial a} \frac{A_2}{a^{\frac{1}{2}(1-j)}} da \neq \int_{0_+}^{\infty} \frac{A_2}{a^{\frac{1}{2}(1-j)}} \frac{\partial}{\partial a} \frac{1}{a^j} \frac{\partial}{\partial a} \frac{A_1}{a^{\frac{1}{2}(1-j)}} da. \quad (5.67)$$

V případě nesymetrického uspořádání můžeme zvolit uspořádání takovým způsobem, že derivace vlnové funkce na okrajích definičního oboru vymizí. Takových možností je nekonečně mnoho a zasahují do řešení nejen v mocnině poloměru vesmíru, kterou násobíme Bassetovu funkci, ale i v řádu Basetovy



Obrázek 5.2: Vlnová funkce A pro symetrické uspořádání 5.32 a $j = 0$, poloměr a je v Planckových jednotkách. Vlevo případ pro $\lambda = 0$, na pravé straně funkce pro $\lambda = 12$.



Obrázek 5.3: Vlnová funkce A pro symetrické uspořádání 5.33, poloměr a je v Planckových jednotkách. Vlevo případ pro $\lambda = 0$, na pravé straně funkce pro $\lambda = 12$.

funkce. To samozřejmě vede k možnému ovlivnění přípustných hodnot impulsu pole podle 5.64.

Nyní nalezneme řešení pro případ, kdy je zvoleno uspořádání 5.33. Po rozepsání derivací obdržíme výraz

$$-\frac{A''}{a} + 2\frac{A'}{a^2} - \frac{9}{2}\frac{A}{a^3}. \quad (5.68)$$

Porovnáním tohoto výrazu s 5.43 obdržíme systém tří rovnic pro tři neznámé i, j, k . Odpovídající řešení je $i = k = \frac{3}{2}(1 \pm i)$, $j = \mp 3i$, kde i je imaginární jednotka. Jde tedy o jedno ze symetrických uspořádání 5.32 s komplexními čísly i, j, k . Takovému operátoru

$$\frac{1}{a^{\frac{3}{2}(1 \pm i)}} \hat{\pi} a^{\pm 3i} \hat{\pi} \frac{1}{a^{\frac{3}{2}(1 \pm i)}} \quad (5.69)$$

⁵Vyjímkou je opět případ $\varepsilon = 0$.

odpovídá řešení

$$A(a) = (\sqrt{6}a)^{\frac{3}{2}} K_{\nu}(6a^2) \quad (5.70)$$

kde $\nu^2 = i^2 \varepsilon^2 = \frac{i^2}{16}(4\lambda^2 + 9)$. Toto řešení se tedy liší od řešení pro reálná čísla i, j, k tím, že i v případě, kdy $\lambda = 0$, je řešením kmitající funkce, která vymizí na okrajích definičního oboru stejně jako její první derivace. V tomto případě tudíž neexistuje možnost obdržet minimální hodnotu impulsu pole nutnou k vývoji vesmíru.

Řešení 5.70 pro ε odpovídající 5.47 nebo $\varepsilon^2 = \frac{1}{16}(4\lambda^2 + 9)$ můžeme možná chápat jako nejvhodnější řešení původního problému.

Nalezená řešení nejsou z Hilbertova prostoru, ale je možné je normovat na delta funkci. Za tím účelem zvolme řešení 5.42 ve tvaru $\varphi = \frac{1}{6^{\frac{1}{4}}\sqrt{2\pi}} e^{i\frac{\lambda}{\sqrt{6}}\phi}$ a skalární součin pro reprezentaci operátory 5.36 definujme jako

$$\langle \psi_{\lambda'}(a, \phi) | \psi_{\lambda}(a, \phi) \rangle := \int_{0+}^{\infty} c(\lambda') c(\lambda) A(a, \lambda') A(a, \lambda) da \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^*(\phi, \lambda') \varphi(\phi, \lambda) d\phi \quad (5.71)$$

a protože platí $f(\lambda)\delta(\lambda - \lambda') = f(\lambda')\delta(\lambda - \lambda')$, můžeme psát skalární součin

$$\langle \psi_{\lambda'}(a, \phi) | \psi_{\lambda}(a, \phi) \rangle = \int_{0+}^{\infty} c^2(\lambda') A^2(a, \lambda') da \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^*(\phi, \lambda') \varphi(\phi, \lambda) d\phi = \delta(\lambda - \lambda'). \quad (5.72)$$

Přitom konstanty $c(\lambda)$ musí být voleny tak, aby platilo

$$\int_{0+}^{\infty} c^2(\lambda') A^2(a, \lambda') da = 1.$$

V případě reprezentace operátory 5.31 je skalární součin

$$\langle \psi_{\lambda'}(a, \phi) | \psi_{\lambda}(a, \phi) \rangle := \int_{0+}^{\infty} c^2(\lambda') A^2(a, \lambda') \frac{da}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^*(\phi, \lambda') \varphi(\phi, \lambda) d\phi = \delta(\lambda - \lambda') \quad (5.73)$$

a na konstantu $c(\lambda')$ je kladena obdobná podmínka jako v předchozím případě.

Zapišme ještě pro úplnost řešení v jednotkách SI:

$$A_{\lambda}(a) = c(\lambda) \left(\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{a}{l_p} \right)^{(1-(1-j-2k)/2)} K_{\nu(\lambda)} \left(\frac{3}{4\pi} \left(\frac{a}{l_p} \right)^2 \right) \quad (5.74)$$

$$\varphi_\lambda(\phi) = \left(\frac{\kappa}{6}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\lambda\sqrt{\frac{\kappa}{6}}\phi} \quad (5.75)$$

kde l_p označuje planckovu délku definovanou jako $l_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}$ a κ je Einsteina gravitační konstanta.

Závěrem poznamenejme, že rovnici 5.38 je možné v případě $j = 0$ zapsat ve tvaru

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial b^2} + \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial b} - \frac{3}{2b^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) B\varphi = \tilde{k} B\varphi. \quad (5.76)$$

Je ihned vidět, že pokud zavedeme do výše uvedené rovnice nový komplexní úhel $\omega = i\sqrt{\frac{3}{2}}\phi$, bude na levé straně stát Laplaceův operátor vyjádřený v polárních souřadnicích s komplexním úhlem $x = b \cos \omega = b \cosh \sqrt{\frac{3}{2}}\phi$, $y = b \sin \omega = ib \sinh \sqrt{\frac{3}{2}}\phi$. Takto dostaneme pro $u(x(b, \phi), y(b, \phi)) = B\varphi$

$$-\Delta u + \tilde{k}u = 0. \quad (5.77)$$

Takový zápis upozorňuje na cestu, kterou je snad možné postupovat při řešení WD rovnice pro případ hmotného skalárního pole.

5.2.3 Řešení pro otevřený model

Pro $\tilde{k} = -1$ máme

$$B'' + \frac{B'}{b} + \left(1 - \frac{\nu^2}{b^2}\right) B = 0, \quad (5.78)$$

což je Besselova rovnice a jejím řešením jsou cylindrické funkce ryze imaginárního řádu ν . Jako obecné řešení můžeme vybrat lineární kombinaci Besselových nebo Hankelových funkcí [25]. Například

$$B(b) = c_1 H_\nu^{(1)}(b) + c_2 H_\nu^{(2)}(b). \quad (5.79)$$

Pro imaginární ν jsou obě Hankelovy funkce omezené na okrajích \mathbb{R}^+ a jako řešení jsou vhodné obě. Jestliže ν je nějaké záporné reálné číslo (tj. když $\nu = i\varepsilon = -|\varepsilon|$), mají obě funkce v nule singularitu a nabývají zde neomezených hodnot. Ovšem funkce A přesto může splňovat podmínku $A(a = 0_+) = 0$. To, zda-li je podmínka splněna, závisí na uspořádání operátorů. V principu je splněna vždy pokud $1 - \frac{1}{2}(1 - j - 2k) - 2|\varepsilon| > 0$. Samozřejmě je přirozené zvolit uspořádání, které se osvědčilo pro $k = 1$. V kvantové mechanice souvisí požadavek omezenosti funkcí v nekonečnu s možností normování na delta funkci, to ovšem zde nepřichází v úvahu ani u jednoho z řešení 5.49, 5.50, protože číslo ε vystupuje ve funkcích v asymptotické oblasti jen jako faktor přispívající k amplitudě Hankelových funkcí

$$H_{i\varepsilon}^{(1)}(6a^2) \simeq \sqrt{\frac{1}{3\pi}} \frac{1}{a} e^{i(6a^2 - \frac{\pi}{4}) + \frac{\pi}{2}\varepsilon} \quad (5.80)$$

$$H_{i\varepsilon}^{(2)}(6a^2) \simeq \sqrt{\frac{1}{3\pi}} \frac{1}{a} e^{-i(6a^2 - \frac{\pi}{4}) - \frac{\pi}{2}\varepsilon}. \quad (5.81)$$

Nemožnost normování funkcí splňujících rovnice 5.40, 5.41 možná souvisí s fyzikální nemožností realizace takového kosmologického modelu. Mohlo by to být způsobeno příliš velkým zjednodušením modelu: Dá se očekávat že hmotné skalární pole k těmto výsledkům nepovede, ale to nemůžeme prohlásit s jistotou.

Zkoumejme nyní chování řešení pro symetrická uspořádání 5.49 a 5.50, je-li funkce B volena jako 5.79. Pro velmi malé hodnoty argumentu můžeme v mocniném rozvoji Hankelových funkcí ryze imaginárního řádu zanedbat členy, které jsou první a vyšší reálnou mocninou argumentu. Nultý člen těchto řad vynásobený $x^{\frac{3}{2}}$ potom můžeme pro 5.50 zapsat jako

$$x^{\frac{3}{2}} H_{i\varepsilon}^{(1)}(x^2) \simeq \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sinh \pi\varepsilon} \left[\frac{e^{\pi\varepsilon}}{\Gamma(1 + i\varepsilon)} \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^{2i\varepsilon} - \frac{1}{\Gamma(1 - i\varepsilon)} \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^{-2i\varepsilon} \right] \quad (5.82)$$

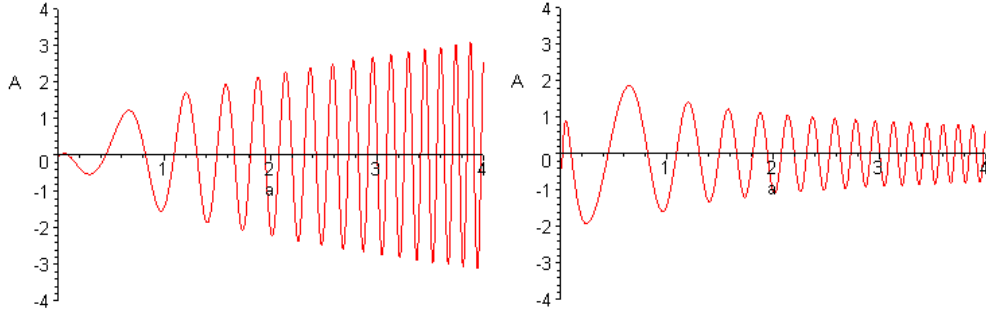
$$x^{\frac{3}{2}} H_{i\varepsilon}^{(2)}(x^2) \simeq \frac{-x^{\frac{3}{2}}}{\sinh \pi \varepsilon} \left[\frac{e^{-\pi \varepsilon}}{\Gamma(1 + i\varepsilon)} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right)^{2i\varepsilon} - \frac{1}{\Gamma(1 - i\varepsilon)} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right)^{-2i\varepsilon} \right]. \quad (5.83)$$

Pro $a \rightarrow 0_+$ tedy funkce nabývají nulových hodnot a podobně platí i pro jejich první derivace

$$\lim_{a \rightarrow 0_+} \frac{\partial A(6a^2)}{\partial a} = 0, \quad (5.84)$$

protože amplituda první derivace funkce je úměrná \sqrt{a} .

Odlišná je situace při volbě 5.49. Funkce sice vymizí v limitě pro $a \rightarrow 0_+$, nikoli ale její první derivace, což se dá snadno prověřit. Situace je tedy obdobná jako pro uzavřený kosmologický model: Všechna řešení pro symetrická uspořádání samosdružených operátorů mají první derivaci v limitě pro $a \rightarrow 0_+$ rovnou nule.



Obrázek 5.4: Imaginární část vlnové funkce $A = (\sqrt{6}a)^{\frac{3}{2}} H_{i\varepsilon}^{(1)}(6a^2)$ a (nesymetrické uspořádání operátorů) funkce $A = (\sqrt{6}a)^{\frac{1}{2}} H_{i\varepsilon}^{(1)}(6a^2)$ pro $\varepsilon = 1$.

Také v případě otevřeného vesmíru platí 5.64, a v podstatě také platí všechny úvahy s tím související uvedené v části o řešení pro uzavřený model.

I když jsme tedy našli řešení rovnice 5.38 pro případ nehmotného skalárního pole v hyperbolickém prostoru, tak tato řešení nesplňují požadavky, které klademe na vlnové funkce ve standardní kvantové teorii (řešení nelze normovat na jednotku ani na delta funkci). To sice nutně neznamená, že takové modely jsou nefyzikální, ale v rámci standardní kvantové fyziky neznáme jiný přiměřený výklad. Samozřejmě to souvisí s výkladem fyzikálního významu vlnové funkce v kanonické kvantové teorii gravitace. Případnou interpretaci vlnové funkce ale můžeme potvrdit nebo vyvrátit pouze cestou experimentálního prověření. Od toho jsme zatím velmi vzdáleni.

Řešením pro libovolné uspořádání je

$$A(a) = (\sqrt{6}a)^{(1-(1-j-2k)/2)} (c_1 H_{\nu}^{(1)}(6a^2) + c_2 H_{\nu}^{(2)}(6a^2)). \quad (5.85)$$

Řešení v jednotkách SI zde již uvádět nebudeme, neboť podoba takového zápisu je jasná z 5.51.

5.2.4 Řešení pro rovný model

Pro $\tilde{k} = 0$ dostáváme z 5.45 jednoduchou diferenciální rovnici druhého řádu

$$B'' + \frac{B'}{b} - \frac{\nu^2}{b^2} B = 0, \quad (5.86)$$

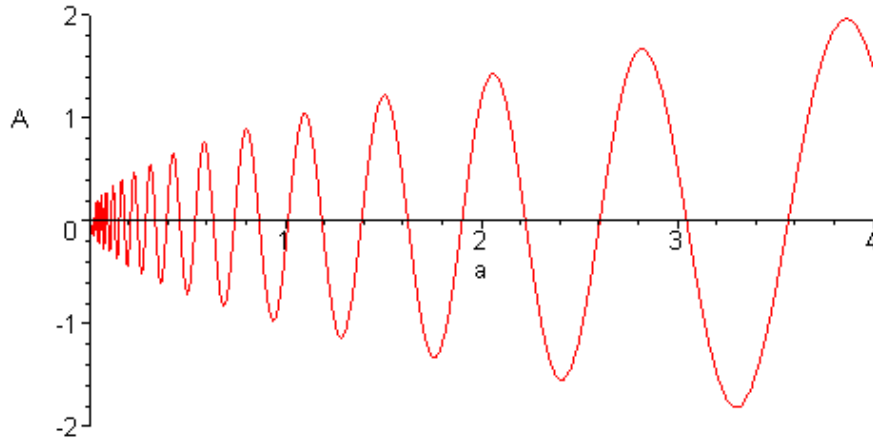
jejímž obecným řešením je

$$B(b) = c_1 b^\nu + c_2 b^{-\nu}, \quad (5.87)$$

takže řešení původního problému je

$$A(a) = (\sqrt{6}a)^{(1-(1-j-2k)/2)} \left(c_1 (\sqrt{6}a)^{2\nu} + c_2 (\sqrt{6}a)^{-2\nu} \right). \quad (5.88)$$

Je-li ν ryze imaginární a platí $1 + j + 2k = 0$, je toto řešení omezené, ale požadavek omezenosti nelze splnit ani pro jedno symetrické uspořádání, jak je možné se snadno přesvědčit dosazením $k = \frac{1}{2}(1 - j)$ do $1 + j + 2k = 0$ (nebo dosazením $j \rightarrow j - 1$ a $k = \frac{1}{2}(3 - j)$). Je přirozené zvolit uspořádání stejné jako u uzavřeného modelu, není ovšem jasné, jsou-li neomezená řešení přijatelná.



Obrázek 5.5: Imaginární část vlnové funkce $A = (\sqrt{6}a)^{\frac{3}{2}+2i\varepsilon}$ pro $\varepsilon = 1$.

Z řešení 5.88 je snadno vidět, že pro první derivaci funkce A v limitě pro argument jdoucí k nule, platí obdobné závěry jako v případě otevřeného a

uzavřeného vesmíru. Tedy všechna řešení pro symetrické uspořádání samosdružených operátorů mají v limitě argumentu jdoucího k nule první derivaci rovnu nule. To ale neplatí pro symetrické uspořádání 5.30.

Také v případě rovného vesmíru platí 5.64, a v podstatě platí všechny úvahy s tím související uvedené v článku o řešení pro uzavřený model. Všeobecně v případě rovného modelu vesmíru s nehmotným skalárním polem máme velmi podobné závěry jako v případě otevřeného modelu.

5.2.5 Časový vývoj

V jednoduchých příkladech kvantových kosmologických modelů, ve kterých není hamiltonián hmoty závislý na metrickém tenzoru, je možné zavést časový vývoj sestavením Schrödingerovy rovnice pro hamiltonián hmoty nebo gravitace. Přitom lze postupovat tak, že času a energii přiřadíme operátory takovým způsobem, že budou splněny komutační relace odpovídající Poissonovým závorkám kanonicky sdružených proměnných t, E_m .

$$\{t, -E_m\} = 1 \quad \rightarrow \quad \left[t, i \frac{\partial}{\partial t} \right] = i \quad (5.89)$$

Protože energie může nabývat pouze kladných hodnot, není operátor času samosdružený. Nyní máme operátor H_m vyjádřen jak v t -reprezentaci tak i v x_m -reprezentaci (x_m může být např. a nebo souřadnice hmoty) a požadujeme jejich shodu ve smyslu fyzikálního působení na stav soustavy. Tak dostáváme Schrödingerovu rovnici

$$\hat{H}_m \psi = i \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (5.90)$$

Časový vývoj je potom dán řešením 5.90 a příkladem takového řešení může být [14]. V případě nehmotného (i hmotného) skalárního pole takto nelze postupovat, protože hamiltonián hmoty je závislý na poloměru vesmíru.

Jednou z možností je použít bezčasovou interpretaci, v rámci které je skalární součin dán jako

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \int_{0+}^{\infty} da \int_{-\infty}^{\infty} d\phi \psi_1^* \psi_2. \quad (5.91)$$

Interpretace tohoto skalárního součinu je obdobná jako v kvantové mechanice, kde je kvadrát modulu vlnové funkce považován za hustotu pravděpodobnosti nalezení systému v nějakém stavu. Tak například $|A(a, \lambda)|^2$ udává hustotu pravděpodobnosti nalezení prostorové nadplochy vesmíru o poloměru a v intervalu $a + da$, ve kterém je skalární pole s impulsem $p_\phi(\lambda)$. Při takové

interpretaci můžeme výsledek kvantové teorie porovnat s klasickou předpovědí, samozřejmě pouze tehdy, je-li klasické řešení známo. V oddíle (5.1) bylo nalezeno klasické řešení pro nehmotné skalární pole v případě plochého prostoru. Na klasické úrovni je pravděpodobnost nalezení vesmíru s poloměrem v intervalu $a + da$ rovna $\frac{dt}{\Delta T} = \frac{da}{\Delta T} \frac{1}{\dot{a}}$. Tedy hustota pravděpodobnosti je úměrná převrácené rychlosti rozpínání vesmíru. To je možné zapsat jako

$$\frac{1}{\dot{a}} = \frac{1}{\dot{a}_0} \left(1 + \frac{\dot{a}_0}{a_0} t \right)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{\dot{a}_0} \frac{a^2}{a_0^2}. \quad (5.92)$$

Z 5.88 potom snadno vidíme, že pro libovolné symetrické uspořádání operátorů ve WD rovnici pro plochý model je amplituda hustoty pravděpodobnosti úměrná a^2 . V tomto smyslu se tedy kvantové řešení shoduje s klasickým. K prověření řešení v zakřiveném prostoročase nám chybí znalost odpovídajících klasických řešení a jedinou cestou je použít numerických metod pro řešení klasických rovnic.

Kromě uvedených možností jak se vyrovnat s časovým vývojem - tj. kromě koncepce vnitřního času a bezčasové interpretace - je známa ještě třetí možnost [17]. Zatímco v případě uvedené koncepce vnitřního času dochází ke ztotožnění času s poloměrem vesmíru až po stanovení vazeb na stavový vektor, jde v dalším případě identifikovat čas s klasickou veličinou před přechodem ke kvantové formulaci ⁶. Tímto případem se nebudeme zabývat.

⁶Isham tyto přístupy nazývá latinsky jako: Tempus ante quantum, Tempus post quantum a Tempus nihil est.

Kapitola 6

Závěr

Pomineme-li konkrétní zadání práce, jako nalezení řešení WD rovnice 5.38 pro hmotné nebo nehmotné skalární pole, bylo autorovou snahou prozkoumat zda-li uvedená teorie zahrnuje možnost inflačního vývoje. Ukázalo se, že pro nehmotná skalární pole inflační vývoj nelze zahrnout do výsledků řešení WD rovnice metodami uvedenými v této práci. Situace je odlišná v rámci smyčkové kvantové teorie gravitace [3]. Je zde přirozená možnost, že inflační fázi zahrnují řešení pro hmotná skalární pole, ale ty zde uvedeny nejsou.

V této práci jsem našel kvantová kosmologická řešení pro modely vesmírů s konstantní prostorovou křivostí - zahrnující případ sférického, hyperbolického a rovného prostoru - ve kterých představuje hmotu nehmotné¹ skalární pole. Řešení byla nalezena pro libovolné uspořádání operátorů, ať již tyto tvořily samosdruženou reprezentaci či nikoli. Zvláštní zřetel byl kladen na symetrická uspořádání operátorů 5.30, 5.32 a uspořádání 5.33, 5.69. Byly ukázány rozdíly v řešení pro libovolná symetrická uspořádání samosdružených a nesamosdružených operátorů a vyšetřeny některé základní vlastnosti funkcí řešících WD rovnici. Bylo ukázáno, že použitá teorie není schopna jednoznačně rozhodnout, zda-li je k vývoji vesmíru potřeba nějaká hodnota impulsu pole, protože tato případná hodnota závisí na uspořádání operátorů. Jestliže není známo jednoznačné řešení problému uspořádání, není možné ani některou hodnotu určit jako minimum nutné k evoluci. Vyšlo najevo, že klasický člen $\frac{\pi^2}{a^3}$ případně $\frac{p^2}{a}$ je možné sestavit takovým způsobem, že zakázaný interval impulsu pole může nabývat všech hodnot, a také že nemusí existovat. Pro nulový impuls pole a pro libovolné symetrické uspořádání je nejpravděpodobnější poloměr uzavřeného vesmíru nenulový. Výsledky byly interpretovány v rámci bezčasového formalismu.

¹Lépe snad skalární pole bez látky.

Literatura

- [1] Blank J., Exner P., Havlíček M.: Lineární operátory ve fyzice. Karolinum, Praha 1993.
- [2] Blochincev D. I.: Základy kvantové mechaniky. ČSAV, Praha 1956.
- [3] Bojowald M., Hinterleitner F.: Isotropic loop quantum gravity with matter. gr-qc/0207038 (2002).
- [4] Burnet G. A.: Closed spherically symmetric massless scalar field spacetimes have finite lifetimes. gr-qc/9404049 (2004).
- [5] Carroll S. M. Lecture notes on general relativity. Univerzity of California 1997. Poslední verze je na adrese: <http://itp.ucsb.edu/~carroll/notes/>
- [6] DeWitt B. S. : Quantum theory of gravity. I. The canonical theory. Physical Review, vol. 160, num. 5, (1967) .
- [7] D'Inverno R.: Introducing Einstein's relativity. Clarendon Press, Oxford 1996.
- [8] Formánek J.: Úvod do kvantové teorie. Academia, Praha 1963.
- [9] Fuks B. A., Šabat B. V.: Funkce komplexní proměnné. Přírodovědecké vydavatelství Praha 1953.
- [10] Gousheh S. S., Sepangi H. R.: Wave packet and initial conditions in quantum cosmology. gr-qc/0006094 (2000).
- [11] Gudmundsson S.: An introduction to Riemannian geometry. Lund university 2002. Poslední verze je na adrese: <http://www.maths.lth.se/matematiklu/personal/sigma/index.html>
- [12] Hájíček P. Quantum theory of gravitational collapse (lecture notes on quantum cosmology). Univerzity of Bern 2002, BUPT-02/4

-
- [13] Hawking S. W., Ellis G. F. R.: The large scale structure of space-time. Cambridge 1973.
 - [14] Hinterleitner F.: A quantized closed Friedmann model. Classical and Quantum Gravity 18. (2001).
 - [15] Horský J., Bartoň S.: Relativistický vesmír. Ando Publishing Brno 1997.
 - [16] Christodoulakis T., Helias C., Kevrekidis P. G., Kevrekidis I. G., Papadopoulos G. O.: On 3+1 dimensional FRW universes with matter. gr-qc/0302120 (2003).
 - [17] Isham C. J.: Canonical quantum gravity and the problem of time. gr-qc/9210011 (1992).
 - [18] Kučera J., Horák Z.: Tenzory v elektrotechnice a ve fyzice. ČSAV Praha 1963.
 - [19] Kuchař K. V.: Canonical quantum gravity. gr-qc/9304012 (1993).
 - [20] Liddle A. R.: An introduction to cosmological inflation. astro-ph/9901124 (1999).
 - [21] Marx G.: Úvod do kvantové mechaniky. SNTL Praha 1965
 - [22] Richtmyer: Principi sovremennoj matematičeskoj fiziki. Nauka Moskva
 - [23] Rovelli C.: Loop quantum gravity. gr-qc/9710008 (1997)
 - [24] Thiemann T.: Introduction to modern canonical quantum general gravity. gr-qc/0110034 (2001).
 - [25] Tichonov A. N., Samarskij A. A.: Rovnice matematické fyziky. ČSAV Praha (1955).